Повороты

1. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1. Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

2. На дуге BC описанной окружности правильного треугольника ABC взята произвольная точка M. Докажите, что $AM = BM + CM$.

3. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ построены правильные треугольники ABM и CDP во внешнюю сторону, а BCN и ADK — во внутреннюю. Докажите, что $MN = PK$.

4. Точка P лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны PA, PB и PC.

5. У двух квадратов $BCDA$ и $BKMN$ есть общая вершина B. Докажите, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

6. ***(Точка Торичелли.)*** В треугольнике все углы не превосходят $120°$.
а) Докажите, что внутри треугольника существует точка T, из которой все стороны видны под углами $120°$.
б) Докажите, что точка T является той точкой плоскости, для которой сумма расстояний от неё до вершин треугольника наименьшая.
в) Какой будет точка с наименьшей суммой расстояний до вершин треугольника для треугольника с углом, большим $120°$.

7. Точки P и Q расположены внутри равностороннего треугольника ABC так, что четырёхугольник $APQC$ — выпуклый, $AP = PQ = QC$ и $\angle PBQ = 30°$. Докажите, что $AQ = BP$.