Лемма Холла

1. На вечере ни один мальчик не танцевал со всеми девочками, а каждая девочка танцевала хотя бы с одним мальчиком. Докажите, что существуют два мальчика и две девочки такие, что первый танцевал с первой, второй — со второй, а первый со второй и второй с первой не танцевали.

2. **Лемма Холла.** Дано n юношей и несколько девушек. Известно, что для любого $k \leqslant n$ и любой группы из k юношей есть не менее k девушек, каждая из которых знакома хотя бы с одним из этих k мальчиков. Докажите, что все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых.

3. **Лемма Холла для арабских стран.** Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

4. Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков (чтобы не создавать предпосылок для драки).

5. Все вершины двудольного графа имеют степень k. Докажите, что их можно разбить на пары смежных.

6. Латинским называется прямоугольник $m \times n$, где $m \leqslant n$, заполненный числами от 1 до n таким образом, что в каждой строчке и в каждом столбце числа различны. Докажите, что любой латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата $n \times n$.

7. У фокусника есть $2k+1$ карточка с номерами от 1 до $2k+1$. Зритель забирает из этой колоды любые k карт и передаёт колоду ассистенту. Затем ассистент забирает ещё одну карту и передаёт оставшиеся k карт фокуснику, после чего фокусник объявляет, какие карты у зрителя. Как фокуснику и ассистенту показать этот фокус?

8. Каждый из двух равновеликих квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.

9. В квадрате $n \times n$ стоят неотрицательные числа так, что в каждой строке и в каждом столбце сумма равна 1. Докажите, что в этот квадрат можно поставить n не бьющих друг друга ладей так, чтобы под каждой поставленной ладьёй было положительное число.