Задачи на делимость

1. Назовём натуральное число *хорошим*, если оно представимо в виде суммы трёх натуральных чисел $a < b < c$ таких, что c делится на b и b делится на a. Найдите наибольшее нехорошее число.

2. Найдите все натуральные числа, у которых разность между суммой двух самых больших собственных делителей и суммой двух самых маленьких собственных делителей является простым числом. (Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа.)

3. Положим $a \bowtie b = \dfrac{a-b}{\text{НОД}(a,b)}$. При каких натуральных n выполнено равенство НОД $(n, n \bowtie k) = 1$ для всех натуральных k от 1 до $n-1$?

4. Среди натуральных чисел, не превосходящих n выбрали все такие, которые взаимно просты с n, а также числа, на 1 большие их, также взаимно просты с n. Докажите, что количество выбранных чисел равно
$$n\left(1-\frac{2}{p_1}\right)\left(1-\frac{2}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{p_k}\right),$$
где p_1, p_2, ..., p_k — все простые делители числа n.

5. Множество A состоит из 20 чисел, имеющих различные остатки от деления на 397. Докажите, что для любого натурального n существуют $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in A$ такие, что $x_1 \neq x_2$, и $(x_1 - x_2)n - (x_3 - x_4)$ делится на 397.

6. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что для любого простого $p < n$ выполнено сравнение
$$p^n \equiv (p-1)^n + 1 \pmod{n^2}.$$