

Построение примеров в алгебре

1. Существуют ли попарно различные натуральные числа x , y и z , удовлетворяющие уравнению $x^3 + y^3 = z^{2024}$?
2. Два натуральных числа называются *похожими*, если одно получается из другого зачёркиванием одной цифры (и возможно отбрасыванием впереди стоящих нулей). Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы двух похожих.
3. Есть кусок сыра. Разрешается выбрать иррациональное $a > 0$ и разрезать этот кусок в отношении $1 : a$ по весу, затем разрезать в том же отношении любой из имеющихся кусков, и т.д. Можно ли действовать так, что после конечного числа разрезов весь сыр удастся разложить на две кучки равного веса?
4. Существует ли такое натуральное n , что число вида $12345678 \underbrace{9 \dots 9}_n 87654321$, в котором n девяток, делится на 2017?
5. Существует ли 1000000 таких различных натуральных чисел, что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом?
6. Докажите, что существует пара натуральных чисел m и n , больших 100500, для которых число $(m + n - 1)(m + n)$ делится на mn .
7. Даны натуральные числа a и b . Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ не делится на $n^b + 1$.
8. На доске написаны натуральные числа от 1 до n (каждое по одному разу). За один ход Дима может стереть числа a и b и написать вместо них число $a^2 - b$. Для каких n он сможет сделать $n - 1$ ход так, чтобы получился 0.