

НОД и НОК

1. Докажите, что НОК четырёх натуральных чисел a, b, c и d не может равняться $ab+cd$.
2. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?
3. Бильярдный стол представляет собой прямоугольник 67×100 , в углах которого расположены лузы. Из нижней левой лузы выкатывается шар по биссектрисе угла. Если шар сталкивается с бортом, то он отскакивает по принципу "угол падения равен углу отражения"; если же шар попадает в лузу, то остаётся в ней. Вернётся ли шар в исходную лузу?
4. В вершинах квадрата расставлены произвольным образом 4 различных натуральных числа. На каждой стороне и диагонали квадрата записывают числа, равные НОД чисел, стоящих в концах соответствующего отрезка. Могло ли оказаться так, что сумма четырёх чисел в вершинах равна сумме шести чисел на сторонах и диагоналях?
5. Найдите все натуральные a, b и c такие, что

$$\text{НОД}(a, b) + \text{НОД}(b, c) + \text{НОД}(c, a) = (a + b + c)/2.$$

6. Найдите все тройки натуральных чисел m, n, l такие, что

$$m + n = \text{НОД}^2(m, n), \quad n + l = \text{НОД}^2(n, l), \quad l + m = \text{НОД}^2(l, m).$$