

Добавка Карно

1. **Лемма.** Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.
2. У шестиугольника $ABCDEF$ углы A и C прямые, а также равны пары сторон $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Докажите, что прямые BE и DF перпендикулярны.
3. На плоскости дан параллелограмм $ABCD$. Описанная окружность треугольника ABC пересекает отрезки AD и CD в точках U и V соответственно. Пусть W - середина меньшей дуги UV . Докажите, что $DW \perp AC$.
4. На плоскости даны трапеция $ABCD$ и прямая l такие, что l перпендикулярна основаниям AD и BC трапеции. Точка P движется по прямой l . Перпендикуляры из B на AP и из C на DP пересекаются в точке Q . Найдите ГМТ Q .
5. В остроугольном треугольнике ABC отметили J — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB , и P — точку, диаметрально противоположную вершине C на окружности, описанной вокруг треугольника ABC . Докажите, что прямые PJ и A_1B_1 перпендикулярны, где A_1 и B_1 — точки касания соответствующих вневписанных окружностей со сторонами BC и AC .