

Теорема Карно

Перпендикуляры, проведённые из точек A_1, B_1, C_1 на прямые BC, CA, AB , содержащие стороны треугольника ABC , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2 = C_1B^2 + A_1C^2 + B_1A^2.$$

- Докажите, что серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке.
- Докажите, используя теорему Карно, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
 - Из точек касания вписанной окружности со сторонами треугольника построили перпендикуляры к сторонам. Докажите, что они пересекутся в одной точке.
 - Будет ли это верно для точек касания внеписанных окружностей со сторонами?
- Перпендикуляры, проведённые из вершин треугольника ABC на соответствующие стороны треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры, проведённые из вершин треугольника $A_1B_1C_1$ на соответствующие стороны треугольника ABC , также пересекаются в одной точке.
- Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки X и Y — середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что прямые XY и A_1B_1 перпендикулярны.
- Вокруг треугольника ABC описана окружность. A_1 — точка пересечения её с прямой, параллельной BC и проходящей через вершину A . Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что перпендикуляры из точек A_1, B_1 и C_1 на прямые BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.
- Треугольник ABC правильный, P — произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, проведённые из центров вписанных окружностей треугольников PAB, PBC и PCA на прямые AB, BC и CA , пересекаются в одной точке.
- Докажите, что если перпендикуляры, восстановленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке, то треугольник равнобедренный.
- Прямые, проведённые через вершины треугольника ABC параллельно соответствующим сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые, проведённые через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ параллельно соответствующим сторонам треугольника ABC , тоже пересекаются в одной точке.
- Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC , M — середина его стороны AB . Точка K симметрична M относительно O . Прямая, перпендикулярная AB и проходящая через точку A , пересекает прямую, перпендикулярную SK и проходящую через C , в точке P . Докажите, что прямая PB делит высоту треугольника ABC , опущенную из вершины C , пополам.