Функция Эйлера и теорема Эйлера

Определение. Пусть n — натуральное число. Количество чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n, обозначается через $\varphi(n)$ («фи от эн»). Функция φ называется *функцией Эйлера*. Например, $\varphi(6) = 2$, потому что среди чисел от 1 до 6 только числа 1 и 5 взаимно просты с 6.

1. Пусть $n > 2$. Докажите, что $\varphi(n)$ чётно.

2. Пусть p — простое число. Найдите **(а)** $\varphi(p)$, **(б)** $\varphi(p^n)$, **(в)** $\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\ldots+\varphi(p^n)$ без вычислений, не пользуясь предыдущими пунктами.

3. **(а)** Пусть $(a, b) = 1$. Докажите, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. **(б)** Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, где p_i — различные простые числа из разложения. Найдите $\varphi(n)$.

4. *Отдельные пункты не принимаются.* Рассмотрим все дроби вида a/n, где $a \leqslant n$. Сократим их все.

(а) Какие числа являются знаменателями получившихся дробей?

(б) У скольких дробей знаменателем является число d?

(в) Сформулируйте и докажите соответствующее равенство.

5. *Отдельные пункты не принимаются.*

(а) Пусть числа a и b взаимно просты с n. Докажите, что ab также взаимно просто с n.

(б) Пусть числа a, b и c взаимно просты с n, а также числа a и b дают разные остатки при делении на n. Докажите, что числа ac и bc также дают разные остатки при делении на n.

(в) Пусть числа a и b взаимно просты с n. Докажите, что найдётся такое число c, что $ac \equiv b \pmod{n}$.

(г) Пусть S — множество из всех чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n, и a взаимно просто с n. Умножим все числа множества S на a. Как изменится остаток от деления произведения всех чисел множества S на n?

(д) **Теорема Эйлера.** Докажите, что если a взаимно просто с n, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

6. Пусть a взаимно просто с 1001. Докажите, что $a^{3000} - 1$ делится на 1001.

7. Существует ли степень тройки, оканчивающаяся на `0001`?

8. Докажите, что $2^{3^k} + 1$ делится на 3^{k+1}.

9. Найдите все пары натуральных чисел (m, n) такие, что $\varphi(\varphi(n^m)) = n$.

10. Докажите, что во всякой бесконечной арифметической прогрессии натуральных чисел найдётся бесконечно много элементов, в разложение которых на простые входит один и тот же набор простых чисел.

11. Некоторые из чисел $1, 2, \ldots, n$ покрашены в красный цвет так, что выполняется условие: если для красных чисел a, b, c (не обязательно различных) число $a(b-c)$ делится на n, то $b = c$. Докажите, что красных чисел не больше $\varphi(n)$.