

Разная алгебра

1. Могут ли графики функций

$$y = ax + b, \quad y = ax + c, \quad y = bx + c, \quad y = bx + a, \quad y = cx + a, \quad y = cx + b$$

содержать стороны и диагонали некоторого четырёхугольника?

2. Действительные числа a, b, c таковы, что среди трёх уравнений

$$x^3 - ax^2 + b = 0, \quad x^3 - bx^2 + c = 0, \quad x^3 - cx^2 + a = 0$$

любые два имеют общий корень. Докажите, что $a = b = c$.

3. Дано натуральное число N . Среди чисел от N^3 до $N^3 + N$ выбрали a чисел и покрасили в красный цвет, b чисел из оставшихся — в синий. Оказалось, что сумма красных чисел делится на сумму синих чисел. Докажите, что a делится на b .
4. Сумма квадратов действительных чисел a, b, c, d равна 1. Докажите, что

$$(1 - a)(1 - b) \geq cd.$$

5. Даны различные натуральные числа a, b, c . Докажите неравенство:

$$\text{НОД}(ab + 1, bc + 1, ac + 1) \leq \frac{a + b + c}{3}.$$