

Тренировочный контеcт 4

1. Докажите, что при $u, v \geq 1/2$ выполняется неравенство

$$u^2v^2 + 2(u + v) \geq 4uv + 1.$$

2. Можно ли во всех клетках бесконечной клетчатой плоскости расставить по одному все целые числа (каждое целое число – ровно в одной клетке) так, чтобы у каждого числа среди четырёх соседних (по стороне) были два числа, больших его, и два числа, меньших его?
3. Натуральные числа от 1 до 100 разбиты на два набора по 50 чисел. Один набор написан вдоль верхней строки таблицы 50×50 , а другой — вдоль левой стороны. В клетки таблицы записаны произведения соответствующих чисел из наборов ("таблица умножения"). Могут ли все эти произведения оказаться различными?
4. На биссектрисе угла B треугольника ABC (внутри треугольника) выбрана точка L , а на отрезке BL выбрана точка K . Известно, что $\angle KAB = \angle LCB = \alpha$. Внутри треугольника выбрана точка P такая, что $AP = PC$ и $\angle APC = 2\angle AKL$. Докажите, что $\angle KPL = 2\alpha$.