Рациональности-иррациональности

1. Числа x, y и z таковы, что все три числа $x + yz$, $y + zx$ и $z + xy$ рациональны, а $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.

2. Один из корней уравнения $x^2+ax+b = 0$ равен $1+\sqrt{3}$. Найдите a и b, если известно, что они рациональны.

3. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 – иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца ("таблица умножения"). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

4. Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для каждых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение – рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.

5. Докажите, что если выражение $\dfrac{x}{x^2+x+1}$ принимает рациональное значение, то и выражение $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ также рационально.

6. Числовое множество M, содержащее 2023 различных положительных числа, таково, что для любых трех различных элементов a, b, c из M число $a^2 + bc$ рационально. Докажите, что можно выбрать такое натуральное n, что для любого a из M число $a\sqrt{n}$ рационально.

7. Пусть A и B – два прямоугольника. Из прямоугольников, равных A, сложили прямоугольник, подобный B. Докажите, что из прямоугольников, равных B, можно сложить прямоугольник, подобный A.