

## Графы

1. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов покрасили в красный цвет — всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдётся замкнутая ломаная из красных отрезков.
2. В стране 20 городов, и из каждого в другие выходит не менее 16 дорог. Страну разбили на несколько частей так, что любая дорога соединяет два города из разных частей. Докажите, что частей не меньше пяти.
3. *Расстоянием* между двумя вершинами дерева назовём длину простого пути, соединяющего их, а *удалённостью* вершины — сумму расстояний от неё до всех других вершин. Докажите, что в дереве, у которого есть две вершины с удалённостями, отличающимися на 1, нечётное число вершин.
4. В стране живёт несколько рыцарей, каждые два из которых либо дружат, либо враждуют между собой, причём каждый имеет ровно  $n$  врагов. Все рыцари живут по принципу «Враг моего друга — мой враг». Как-то раз один рыцарь перебил всех своих врагов, после чего в живых осталось ровно 5 рыцарей. Докажите, что  $n$  делится на 5.
5. 38 попугаев передрались, измеряя рост удава. Каждый из них сумел выдрать одно перо из чьего-то хвоста, и у каждого попугая было выдрано одно перо. Кроме того, для любых трёх попугаев можно указать четвёртого, выдравшего перо у одного из них. Докажите, что для наведения порядка удав может проглотить не больше 6 попугаев, а остальных рассадить поровну в две клетки так, чтобы ни один попугай не попал в одну группу со своим обидчиком.
6. На симпозиум приехали 100 человек. Из них 15 французов, каждый из которых знаком хотя бы с 70 участниками симпозиума, и 85 немцев, каждый из которых знаком не более чем с десятью участниками. Их расселили в 21 комнату. Докажите, что в какой-то из комнат нет ни одной пары знакомых.