Диагностическая работа, очный этап, решения.

1. 2023 жителя острова рыцарей и лжецов по очереди сделали следующее высказывание: «Среди сделанных ранее высказываний истинных ровно на 100 меньше, чем ложных.» Сколько среди них могло быть рыцарей? Укажите все возможные ответы и докажите, что других нет. (Напомним, что на острове рыцарей и лжецов живут либо рыцари, которые всегда говорят правду, либо лжецы, который всегда лгут.)

Ответ: 962.

Решение. Заметим, что первые 100 высказываний заведомо ложные. Тогда выступавший 101-ым по счёту говорит правду, и разница между ложными и истинными высказываниями становится равной 99. Значит следующий выступавший обязательно лжёт, и разница снова становится равно 100, и так далее, то есть далее рыцари и лжецы чередуются. Следовательно рыцарей будет $\left\lceil \frac{2023-100}{2} \right\rceil = 962$.

2. Действительные числа a, b, c и d таковы, что $a + b + c + d = 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd} = 0$. Какие значения может принимать выражение $(ab - cd)(c + d)$? Укажите все возможные ответы и докажите, что других нет.

Ответ: -1.

Решение. $0 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd} = \frac{bcd+acd+abd+abc+1}{abcd} \Longrightarrow bcd + acd + abd + abc = -1 \Longrightarrow ab(c + d) + cd(a + b) = -1 \Longrightarrow ab(c + d) - cd(c + d) = (ab - cd)(c + d) = -1$ (так как $a + b + c + d = 0$).

3. Джинн выбрал 6 натуральных чисел от 1 до 36 и проклял их. Петя заполняет несколько карточек, на каждой из них указывая 6 чисел от 1 до 36, и отдаёт их Джинну. Если на какой-то его карточке нет проклятых чисел, то Джинн исполнит желание Пети. Какое наименьшее число карточек понадобится Пете, чтобы Джинн точно исполнил его желание?

Ответ: 9.

Решение. Оценка. Пусть есть некоторый набор из 8 карточек, который нам подходит. Если какое-то число встречается на этих карточках хотя бы 3 раза, то Джинн мог проклясть его, и ещё 5 чисел на оставшихся карточках, итого ни одна наша карточке не подходит. Пусть такого числа нет, тогда найдём пару карточек, у которых есть одинаковое число (такая, очевидно, есть) и проклянём это число. Если среди оставшихся 6 карточек найдётся ещё одна пара с общим числом, то проклянём его и ещё по одному числу из остальных 4 карточек, итого проклянём все карточки. Но если такой пары не найдётся, значит все числа на этих карточках различны, а их всего $6 \cdot 6 = 36$, значит там встречаются все числа ровно по одному разу. В частности там встречается и общее число первых двух карточек, то есть некоторое число встречается на трёх карточках сразу, противоречие. Значит восьми точно не хватит.

Пример. Три карточки заполним 18 различными номерами. Оставшиеся 18 номеров разобьем на две девятки. Каждую девятку разобьем на три тройки и составим три различных набора номеров из двух троек каждый. Чтобы «убить» две тройки таких наборов, нужно хотя бы дважды по два неудачных номера, и оставшихся двух номеров на три не пересекающихся набора не хватит.

Пример. Три карточки заполним 18 различными номерами. Оставшиеся 18 номеров разобьем на две девятки. Из каждой девятки $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ составим три карточки: первая карточка a, b, c, d, e, f, вторая a, b, c, g, h, i, и третья d, e, f, g, h, i. Тогда чтобы все эти карточки нам не подходили среди этих девяти чисел должно быть минимум 2 проклятых, итого 4 проклятых за две девятки + ещё минимум 3 проклятых числа с первых трёх карточек, итого уже минимум 7 проклятых чисел, значит пример подходит.

4. В квадрате $ABCD$ на сторонах AB и AD отмечены точки N и P соответственно так, что $CN = NP$. Точка Q на отрезке AN такова, что $\angle BCN = \angle NPQ$. Докажите, что $\angle AQP = 2\angle BCQ$.

Решение. Заметим, что $\angle QPC = \angle QPN + \angle NPC = \angle BCN + \angle NCP = \angle BCP = \angle CPD$, то есть C лежит на внешней биссектрисе при вершине P треугольника AQP. Также очевидно, что C лежит на биссектрисе угла A этого треугольника. Значит QC — биссектриса угла BQP. В таком случае, если $\angle AQP = 2\alpha$, то $\angle BQC = 90^\circ - \alpha$, тогда $\angle BCQ = \alpha$, что и требовалось.

5. У двух игроков A и B имеется неограниченный запас фигурок трёх видов:

1. уголок из трёх клеток;
2. прямоугольник 1×2;
3. квадрат 1×1.

Они по очереди (начинает A) ставят фигурки на доску размером 2022×2023 клеточек, причём A при своём ходе должен поставить одну фигурку вида (1), а B — по одной фигурке каждого из видов (1), (2) и (3). Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: B.

Решение. Разделим мысленно нашу доску на три прямоугольника 674×2023. Наша стратегия за B делать так, чтобы после нашего хода каждый из этих прямоугольников был заполнен одинаково. Если A своим ходом поставил уголок внутрь одного прямоугольника, то мы своим ходом сможем поставить на соответствующие клетки двух других прямоугольников по уголку (один из уголков мы получим соединив прямоугольник 1×2 и квадрат 1×1). Если же A поставит уголок на границу двух прямоугольников, то мы поставим свой уголок на границу между двумя другими прямоугольниками, а также поставим прямоугольник 1×2 и квадрат 1×1 так, что если бы мы соединил соответствующие стороны двух крайних прямоугольников, то они бы тоже образовали соответствующий уголок. Итого пока первый может сделать ход, мы тоже сможем его сделать, значит мы победим.

6. Найдите все натуральные n и простые p такие, что $n^3 = p^2 - p - 1$.

Ответ: $p = 2, n = 1$ или $p = 37, n = 11$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $p(p-1) = (n+1)(n^2-n+1)$. Один из сомножителей в правой части должен делиться на p.

Первый случай. На p делится $n+1$. В этом случае $n^2 - n + 1 \leqslant p - 1 < p \leqslant n + 1$, откуда $n^2 – 2n < 0$, $n = 1$ и $p = 2$.

Второй случай. На p делится $n^2 - n + 1$. Пусть $n^2 - n + 1 = mp$ и, следовательно, $p - 1 = m(n+1)$. Подставляя $p = mn + m + 1$ в уравнение $n^2 - n + 1 = mp$, находим $n^2 - (m^2 + 1)n - (m^2 + m - 1) = 0$. Дискриминант этого квадратного уравнения относительно n равен $m^4 + 6m^2 + 4m - 3 = (m^2+3)^2 + (4m-12)$ и является полным квадратом. При $m = 1$ и $m = 2$ это, очевидно, не так. Если дискриминант не равен $(m^2+3)^2$, он должен быть не меньше $(m^2+4)^2$, откуда $2m^2 + 7 \leqslant 4m - 12$, то есть $2m^2 - 4m + 19 \leqslant 0$, что при $m > 3$ невозможно. Итак, $m = 3$. Отсюда для n получается уравнение $n^2 - 10n - 11 = 0$, то есть $n = 11$ и $p = 37$.