

Степень точки

1. Две окружности пересекаются в точках A и B . Из точки K , лежащей на прямой AB вне отрезка AB , проведены касательные к этим окружностям. Докажите, что длины отрезков, соединяющих точку K с точками касания, равны.
2. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Описанная окружность треугольника BMA пересекает прямую AC в точке X , а описанная окружность треугольника BMC пересекает прямую AC в точке Y . Докажите, что M — точка пересечения медиан треугольника XBY .
3. Точка M — середина стороны BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Прямая, проходящая через M параллельно AC , пересекает в точке K не содержащую точки A дугу BC описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что если $AM = AC$, то $MK = AC/2$.
4. На окружности даны точки A, B, C, D , причём отрезки AB и CD пересекаются в точке M . Докажите, что $\frac{AC \cdot AD}{AM} = \frac{BC \cdot BD}{BM}$.
5. Точки A, B и C лежат на одной прямой, причём B — между A и C . На отрезках AB и AC как на диаметрах построены окружности. Прямая, перпендикулярная AC и проходящая через точку B , пересекает большую окружность в точке D . Прямая, проходящая через точку C , касается меньшей окружности в точке K . Докажите, что $CD = CK$.
6. BD — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$.
7. Точки A и B лежат на окружности ω с центром O , причём O не лежит на прямой AB . На отрезке AB выбрана точка C . Точки M и N — середины отрезков AC и CB соответственно. Описанные окружности треугольников AON и BOM пересекают ω вторично в точках K и L соответственно, и пересекаются друг с другом вторично в точке X . Докажите, что точки C, K, X, L лежат на одной окружности.