

## Игры и клеточки

1. Двое играют на доске  $19 \times 94$  клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре?
2. Уголок размера  $n \times m$ , где  $m, n \geq 2$ , называется фигура, получаемая из прямоугольника размера  $n \times m$  клеток удалением прямоугольника размера  $(n-1) \times (m-1)$  клеток. Два игрока по очереди делают ходы, заключающиеся в закрашивании в уголке произвольного ненулевого количества клеток, образующих прямоугольник или квадрат. Пропускать ход или красить одну клетку дважды нельзя. Кто из игроков победит при правильной игре, если проигрывает тот, кто  
(а) не может сделать ход; (б) сделает последний ход?
3. Двое играют в крестики-нолики на доске  $10 \times 10$  по следующим правилам. Сначала они заполняют крестиками и ноликами всю доску, ставя их по очереди (начинающий игру ставит крестики, его партнер — нолики). Затем подсчитываются два числа:  $K$  — число пятерок подряд стоящих крестиков и  $N$  — число пятерок подряд стоящих ноликов. (Считаются пятерки, стоящие по горизонтали, по вертикали и параллельно диагонали; если подряд стоят шесть крестиков, то это даёт две пятерки, если семь, то три и т. д.) Число  $K - N$  считается выигрышем первого игрока (проигрышем второго). Найдите такое значение  $X$ , что первый может себе обеспечить выигрыш не меньше  $X$ , как бы ни играл второй, а второй может проиграть не больше  $X$ , как бы ни играл первый.
4. Двое игроков по очереди выставляют на доску  $65 \times 65$  по одной шашке. При этом ни в одной линии (горизонтально или вертикали) не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?
5. На изначально белой доске  $2022 \times 2023$  двое по очереди закрашивают связанные фигуры из 9 клеток (перекрашивать уже закрашенные клетки запрещено). Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?  
  
Фигура из нескольких клеток называется связанной, если из любой клетки фигуры можно перейти в любую другую переходя только в соседние по стороне клетки фигуры.
6. Петя и Вася играют на доске  $100 \times 100$ . Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?