Задачи про функции

1. Докажите неравенство $a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1)$.

2. Пусть a, b, c, d, e и f — некоторые числа, причем $ace \neq 0$. Известно, что значения выражений $|ax + b| + |cx + d|$ и $|ex + f|$ равны при всех значениях x. Докажите, что $ad = bc$.

3. Найдите все такие функции $f(x)$, определённые при всех $x \neq 1$, удовлетворяющие соотношению
$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x.$$

4. Два приведённых квадратных трёхчлена $P(x)$ и $Q(x)$ подобраны так, что уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ не имеет корней. Могут ли эти трёхчлены иметь одинаковые свободные члены?

5. Дан квадратный трехчлен $P(x) = x^2 + px + q$ с вещественными коэффициентами. Известно, что $P(x)$ имеет два корня, оба его корня меньше -1, а модуль разности между корнями меньше 2. Докажите, что $P(P(x)) > 0$ для всех x.

6. Васе задали на дом уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, где p_1 и q_1 — целые числа. Он нашел его корни p_2 и q_2 и написал новое уравнение $x^2 + p_2x + q_2 = 0$. Повторив операцию еще трижды, Вася заметил, что он решал 4 квадратных уравнения, и все они имели целые корни (если из двух возможных уравнений корни имело ровно одно, то Вася всегда выбирал его, а если оба — любое). Однако, как ни старался Вася, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело вещественные корни, и Вася сильно расстроился. Какое уравнение Васе задали на дом?

7. Вася выписал на доску несколько приведённых квадратных трёхчленов с положительными коэффициентами, у каждого из которых есть корень. За один ход Вася имеет право стереть два из написанных трёхчленов P и Q и заменить их на два других приведённых квадратных трёхчлена P_1 и Q_1, имеющих корни, так, что либо $P + Q = P_1 + Q_1$, либо $PQ = P_1Q_1$. После нескольких таких операций все трёхчлены на доске имели положительные корни. Могло ли такое быть?