Вписанные углы и четырехугольники

1. Точка K — середин *«меньшей»* дуги AB вписанного четырехугольника $ABCD$. Хорды CK и AB пересекаются в точке P, хорды DK и AB пересекаются в точке Q. Доказать, что четырехугольник $CPQD$ вписанный.

2. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены лучи, образующие между собой угол 45°. Один из них пересекает диагональ BD в точке M, другой — сторону CD в точке N. Найти величину угла AMN.

3. В остроугольном треугольнике ABC с углом $\angle A = 60°$ отмечены точки H, I, O — ортоцентр и центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника HIO проходит через вершину B.

4. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD. На отрезке AB взяли точку M так, что $AM = AC$, а на отрезке CD — точку N так, что $DN = DB$. Докажите, что если точки M и N не совпадают, то прямая MN параллельна прямой AD.

5. В окружность вписан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AE = DE$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. На продолжении стороны AB за точку A отмечена такая точка Q, что $AQ = DP$. На продолжении стороны DC за точку D отмечена такая точка R, что $DR = AP$. Докажите, что $PE \perp QR$.

6. На описанной окружности ω треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Точки P и Q на окружности ω таковы, что $CP \perp AM$, $CQ \perp BM$. Доказать, что $PB \parallel QA$.

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC — точки N и M соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K — точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.