Вписанные углы. Счет дуг.

Утверждение о центральном угле. Центральный угол в 2 раза больше вписанного.

Утверждение о вписанных углах. Углы, опирающиеся на равные дуги, равны

Важный факт. Пусть точки A, B, C, D лежат на окружности Ω (именно в таком порядке!). Тогда угол между прямыми AC и BD равен полусумме мер дуг AB и CD, угол между прямыми AB CD равен полуразности дуг AB и CD.

1. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Доказать, что $\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$

2. Точки M и N — середины «меньшей» и «большей» дуг BC описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC соответственно. Докажите, что прямая AM — биссектриса угла BAC, а прямая AN — биссектриса внешнего угла BAC.

3. Треугольник ABC вписан в окружность ω. Биссектрисы углов B и C пересекают ω в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что отрезок B_1C_1 отсекает от треугольника ABC равнобедренный треугольник.

4. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Доказить, что $\angle APB = \angle AOB$.

5. AB - хорда окружности ω с центром O. K - произвольная точка на хорде AB. Окружность, проходящая через точки O, A и K вторично пересекает ω в точке X. Доказать, что треугольник BKX равнобедренный.

6. Точка D — отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно стороны BC. Отрезки BD и CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q соответственно. Докажите, что AD — биссектриса угла PAQ.

7. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка T, что

   $$\angle BTC = \angle BAC + 60^\circ, \angle CTA = \angle CBA + 60^\circ, \angle ATB = \angle ACB + 60^\circ$$

   Лучи AT, BT, CT продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что полученные точки пересечения образуют равносторонний треугольник.

8. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Противоположные стороны AB и CD при продолжении пересекаются в точке K, стороны BC и AD - в точке L. Докажите, что биссектрисы углов BKC и BLA перпендикулярны.

9. В треугольнике ABC ($AB < AC$) проведена биссектриса AL. Перпендикуляр из точки L на прямую AC пересекает «меньшую» дугу AC описанной окружности Ω треугольника ABC в точке D. Перпендикуляр из точки A на прямую BD пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что точки D K и середина «меньшей» дуги BC окружности Ω лежат на одной прямой.