

Неравенство Коши. Добавка

11. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}}.$$

12. a, b и c — положительные числа, произведение которых равно 1. Докажите неравенство:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{2}{3}(a^3 + b^3 + c^3) + 1.$$

13. Про положительные числа a, b, c, d известно, что $abcd = 1$. Докажите, что среди чисел $\frac{a^2 + 1}{b}, \frac{b^2 + 1}{c}, \frac{c^2 + 1}{d}, \frac{d^2 + 1}{a}$ есть число, не меньшее 2.

14. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$x(y + z - x^3) = y(z + x - y^3) = z(x + y - z^3) = 1.$$

15. Для положительных чисел докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$