Неравенство Коши

В задачах 1-5 числа положительные.

1. $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$

2. $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geqslant 16$

3. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 \geqslant x_1\left(x_2+x_3+x_4+x_5\right)$

4. $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c)$

5. $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2} \leqslant \frac{1}{xy}$

6. Докажите, что для любого положительного x и натурального n выполняется неравенство

$$1+x^{n+1} \geqslant \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}$$

.

7. $x^4+y^4+z^2+1 \geqslant 2x\left(xy^2-x+z+1\right)$

8. a, b, c — положительные числа, произведение которых равно 1. Докажите, что

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant \frac{2}{3}\left(a^3+b^3+c^3\right)+1$$

.

9. $\sin^2 x\cos y+\sin^2 y\cos z+\sin^2 z\cos x \leqslant \frac{3}{2}$

10. Решите в положительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{x_2}=4 \\ x_2+\dfrac{1}{x_3}=1 \\ x_3+\dfrac{1}{x_4}=4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{99}+\dfrac{1}{x_{100}}=4 \\ x_{100}+\dfrac{1}{x_1}=1. \end{cases}$$