Геометрия с Уральского турнира

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CF и BE. На отрезке BE нашлась такая точка P, что $BP = AC$. На продолжении отрезка CF за точку F нашлась такая точка Q, что $CQ = AB$. Докажите, что $AP \perp AQ$.

2. В выпуклом шестиугольнике $AMBCND$ противоположные стороны попарно параллельны. Известно, что $\angle A = 140°$ и $\angle B = 130°$. Докажите, что $2MN \leqslant AB + BC + CD + AD$.

3. На сторонах CD и AD прямоугольника $ABCD$ выбраны точки E и F соответственно. Перпендикуляр из точки E на прямую BF пересекает прямую BC в точке P. Перпендикуляр из точки F на прямую BE пересекает прямую AB в точке Q. Докажите, что точки P, D и Q лежат на одной прямой.

4. Пусть M, N, K — середины сторон AB, BC, CA треугольника ABC, соответственно. На отрезке MN выбрана точка P, а на отрезке NK — точка Q. Возможно ли одновременное выполнение соотношений $AP + AQ = BC$ и $BQ + CP = AB + AC$?

5. Стороны в остроугольном треугольнике ABC таковы, что $BC < CA < AB$. На сторонах AC и AB выбраны точки K и L соответственно так, что $AK = AL = BC$. Серединные перпендикуляры к CK и BL пересекают прямую BC в точках P и Q соответственно. Отрезки KP и LQ пересекаются в точке M. Докажите, что $CK + KM = BL + LM$.

6. На медиане AD треугольника ABC отмечена точка E. Точка F — проекция точки E на сторону BC. На отрезке EF отмечена точка M. Точки N и P — проекции точки M на прямые AC и AB соответственно. Докажите, что биссектрисы углов PMN и PEN параллельны.