Теорема Фалеса

Задачи нужно решить без использования подобия треугольников.

1. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взята точка K. Прямая AK пересекает прямые BC и CD в точках L и M. Докажите, что $AK^2 = KL \cdot KM$.

2. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC соответственно отмечены точки D и E так, что $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{BE}{EC} = 2$ и $\angle ACB = 2\angle BED$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ противоположные углы A и C прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Докажите, что $CE = FA$.

4. **(а)** Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях $BA_1 : A_1C = 1 : p$ и $AB_1 : B_1C = 1 : q$. В каком отношении отрезок AA_1 делится отрезком BB_1?
   (б) В треугольнике ABC со сторонами $BC = 3$, $CA = 4$, $AB = 6$ найдите отношение, в котором биссектриса угла A делит отрезок BB_1, где точка B_1 лежит на стороне AC, причём $AB_1 : B_1C = 1 : 3$.

5. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка X, а на сторонах AB и CD соответственно точки Y и Z так, что $XY \parallel BD$, $XZ \parallel AC$. Докажите, что площади треугольников BXY и CXZ равны.

6. В треугольнике ABC AA_1 — медиана, AA_2 — биссектриса, K — такая точка на AA_1, что $KA_2 \parallel AC$. Докажите, что $AA_2 \perp KC$.