

Неравенства

Полезный факт: $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

1. Для положительных чисел x и y докажите неравенство:

$$(x^2 + 4)(y^2 + 4) \geq 2x(y^2 + 4) + 2y(x^2 + 4).$$

2. Докажите неравенство: $(x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 + (-x + y + z)^2 + \frac{3}{4} \geq x + y + z$.

3. Для положительных a и b докажите неравенство $\frac{a^2 + 7}{b + 3} + \frac{b^2 + 7}{a + 3} \geq 4$.

4. Сумма трёх неотрицательных чисел a , b и c равна 3. Докажите, что:

$$\frac{a-1}{a^2+2} + \frac{b-1}{b^2+2} + \frac{c-1}{c^2+2} \leq 0.$$

5. Различные положительные числа a и b удовлетворяют равенству:

$$\frac{a}{a^3 + a + 1} = \frac{b}{b^3 + b + 1}.$$

Докажите, что $ab + a + b > 2$.

6. Для положительных чисел a , b и c , сумма которых равна 1, докажите неравенство:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

Неравенства

Полезный факт: $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

1. Для положительных чисел x и y докажите неравенство:

$$(x^2 + 4)(y^2 + 4) \geq 2x(y^2 + 4) + 2y(x^2 + 4).$$

2. Докажите неравенство: $(x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 + (-x + y + z)^2 + \frac{3}{4} \geq x + y + z$.

3. Для положительных a и b докажите неравенство $\frac{a^2 + 7}{b + 3} + \frac{b^2 + 7}{a + 3} \geq 4$.

4. Сумма трёх неотрицательных чисел a , b и c равна 3. Докажите, что:

$$\frac{a-1}{a^2+2} + \frac{b-1}{b^2+2} + \frac{c-1}{c^2+2} \leq 0.$$

5. Различные положительные числа a и b удовлетворяют равенству:

$$\frac{a}{a^3 + a + 1} = \frac{b}{b^3 + b + 1}.$$

Докажите, что $ab + a + b > 2$.

6. Для положительных чисел a , b и c , сумма которых равна 1, докажите неравенство:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$