

Выделение квадратов

0. Для произвольных действительных чисел x и y докажите неравенство:

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 \geq 4xy(x^2 + y^2).$$

1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 2y - 2 = 0 \\ y^2 + 4z + 7 = 0 \\ z^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

2. Решите в целых числах уравнение $\frac{b^2 + c^2 - bc}{a} = \frac{2b + 2c - a}{4}$.

3. Для действительных x и y докажите неравенство $(x^2 + y^2)^2 \geq 8(x - y)^2xy$.

4. Произведение положительных чисел a, b, c равно 1. Докажите, что

$$a + b + c \geq \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

5. Можно ли нарисовать в ряд бесконечную цепочку прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами такую, чтобы у любых двух соседних треугольников были равные стороны?

6. На доске выписаны 2022 числа, не все из которых равны 0. Оказалось, что сумма всех чисел равна 0. Докажите, что выписанные числа можно обозначить за $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ так, что

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{2021} a_{2022} + a_{2022} a_1 \leq 0.$$

Выделение квадратов

0. Для произвольных действительных чисел x и y докажите неравенство:

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 \geq 4xy(x^2 + y^2).$$

1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 2y - 2 = 0 \\ y^2 + 4z + 7 = 0 \\ z^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

2. Решите в целых числах уравнение $\frac{b^2 + c^2 - bc}{a} = \frac{2b + 2c - a}{4}$.

3. Для действительных x и y докажите неравенство $(x^2 + y^2)^2 \geq 8(x - y)^2xy$.

4. Произведение положительных чисел a, b, c равно 1. Докажите, что

$$a + b + c \geq \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

5. Можно ли нарисовать в ряд бесконечную цепочку прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами такую, чтобы у любых двух соседних треугольников были равные стороны?

6. На доске выписаны 2022 числа, не все из которых равны 0. Оказалось, что сумма всех чисел равна 0. Докажите, что выписанные числа можно обозначить за $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ так, что

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{2021} a_{2022} + a_{2022} a_1 \leq 0.$$