

## Перестановки и циклы

1. Мартышка, Осел, Козел, Мишка и Коза, пытаются улучшить игру своего оркестра, зачислили в него Лебедя, Рака, Щуку, Ворону и Лисицу. Оркестр расселся на десяти пронумерованных стульях, но игра опять не пошла. Поэтому каждые пять минут они пересаживались по такой схеме:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	9	6	2	8	5	1	10	4	3

Через какое время все музыканты впервые одновременно окажутся на своих исходных местах?

2. Какая чётность у перестановки, представляющей собой цикл длинны  $n$ ?
3. На полковом плацу нарисован прямоугольник  $1 \times 7$ , разбитый на 7 квадратов. В квадратах написаны числа от 1 до 7, но не обязательно по порядку. Старшина выстроил семерых солдат в шеренгу так, что каждый стоит в своем квадрате. По команде «Переставься!» каждый солдат переходит из своего квадрата в  $k$ -ый слева (считая сначала), где  $k$  — число, написанное в квадрате, где стоит солдат.
- (а) Докажите, что начальное расположение солдат рано или поздно повторится.  
(б) Докажите, что это произойдёт не позже, чем через 12 команд.
4. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене). Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня. (Предполагается, что при любых обменах каждая семья как до, так и после обмена занимает одну квартиру, и что семьи при этом сохраняются).
5. Федя и Петя договорились показать Маше фокус. У них есть колода из 100 карт, пронумерованных числами  $1, 2, \dots, 100$ . Обратные стороны всех карт неразличимы. Маша раскладывает карты в произвольном порядке числом вверх. Петя, посмотрев на них, либо меняет две карты местами, либо не делает ничего. Затем карты (с сохранением порядка) переворачиваются числом вниз, и в комнату входит Федя. Маша называет ему число от 1 до 100, и он по одной переворачивает карты с целью перевернуть карту со сказанным числом. Могут ли Федя и Петя договориться так, чтобы Федя гарантированно нашёл карточку не более, чем за 50 переворачиваний?

## Перестановки и циклы

1. Мартышка, Осел, Козел, Мишка и Коза, пытаются улучшить игру своего оркестра, зачислили в него Лебедя, Рака, Щуку, Ворону и Лисицу. Оркестр расселся на десяти пронумерованных стульях, но игра опять не пошла. Поэтому каждые пять минут они пересаживались по такой схеме:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	9	6	2	8	5	1	10	4	3

Через какое время все музыканты впервые одновременно окажутся на своих исходных местах?

2. Какая чётность у перестановки, представляющей собой цикл длинны  $n$ ?
3. На полковом плацу нарисован прямоугольник  $1 \times 7$ , разбитый на 7 квадратов. В квадратах написаны числа от 1 до 7, но не обязательно по порядку. Старшина выстроил семерых солдат в шеренгу так, что каждый стоит в своем квадрате. По команде «Переставься!» каждый солдат переходит из своего квадрата в  $k$ -ый слева (считая сначала), где  $k$  — число, написанное в квадрате, где стоит солдат.
- (а) Докажите, что начальное расположение солдат рано или поздно повторится.  
(б) Докажите, что это произойдёт не позже, чем через 12 команд.
4. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене). Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня. (Предполагается, что при любых обменах каждая семья как до, так и после обмена занимает одну квартиру, и что семьи при этом сохраняются).
5. Федя и Петя договорились показать Маше фокус. У них есть колода из 100 карт, пронумерованных числами  $1, 2, \dots, 100$ . Обратные стороны всех карт неразличимы. Маша раскладывает карты в произвольном порядке числом вверх. Петя, посмотрев на них, либо меняет две карты местами, либо не делает ничего. Затем карты (с сохранением порядка) переворачиваются числом вниз, и в комнату входит Федя. Маша называет ему число от 1 до 100, и он по одной переворачивает карты с целью перевернуть карту со сказанным числом. Могут ли Федя и Петя договориться так, чтобы Федя гарантированно нашёл карточку не более, чем за 50 переворачиваний?