

## Средние линии и теорема Вариньона

1. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что средняя линия трапеции равна высоте.
2. (а) Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырёхугольника без параллельных сторон и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.  
(б) Что будет, если параллельные стороны есть?
3. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке.
4. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон  $AD$  и  $BC$ . Найдите угол, образованный продолжениями сторон  $AB$  и  $CD$ .
5. В четырёхугольнике  $ABCD$ , противоположные стороны которого не параллельны, точка  $E$  — середина  $AB$ ,  $F$  — середина  $CD$ . Докажите, что середины отрезков  $AF$ ,  $CE$ ,  $BF$  и  $DE$  являются вершинами параллелограмма.
6. Внутри квадрата  $ABCD$  построен равносторонний треугольник  $BCK$ . Прямые  $BK$  и  $CD$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что отрезок, соединяющий середины отрезков  $KD$  и  $AP$ , равен половине стороны квадрата.
7. В треугольнике  $ABC$  провели биссектрисы углов  $A$  и  $C$ . Точки  $P$  и  $Q$  — основания перпендикуляров, опущенных из вершины  $B$  на эти биссектрисы. Докажите, что  $PQ \parallel AC$ .
8. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  в точках  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно. Прямая, проходящая через вершину  $A$  и параллельная  $NK$ , пересекает прямую  $MN$  в точке  $D$ . Прямая, проходящая через  $A$  и параллельная  $MN$ , пересекает прямую  $NK$  в точке  $E$ . Докажите, что прямая  $DE$  содержит среднюю линию треугольника  $ABC$ .

## Средние линии и теорема Вариньона

1. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что средняя линия трапеции равна высоте.
2. (а) Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырёхугольника без параллельных сторон и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.  
(б) Что будет, если параллельные стороны есть?
3. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке.
4. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон  $AD$  и  $BC$ . Найдите угол, образованный продолжениями сторон  $AB$  и  $CD$ .
5. В четырёхугольнике  $ABCD$ , противоположные стороны которого не параллельны, точка  $E$  — середина  $AB$ ,  $F$  — середина  $CD$ . Докажите, что середины отрезков  $AF$ ,  $CE$ ,  $BF$  и  $DE$  являются вершинами параллелограмма.
6. Внутри квадрата  $ABCD$  построен равносторонний треугольник  $BCK$ . Прямые  $BK$  и  $CD$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что отрезок, соединяющий середины отрезков  $KD$  и  $AP$ , равен половине стороны квадрата.
7. В треугольнике  $ABC$  провели биссектрисы углов  $A$  и  $C$ . Точки  $P$  и  $Q$  — основания перпендикуляров, опущенных из вершины  $B$  на эти биссектрисы. Докажите, что  $PQ \parallel AC$ .
8. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  в точках  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно. Прямая, проходящая через вершину  $A$  и параллельная  $NK$ , пересекает прямую  $MN$  в точке  $D$ . Прямая, проходящая через  $A$  и параллельная  $MN$ , пересекает прямую  $NK$  в точке  $E$ . Докажите, что прямая  $DE$  содержит среднюю линию треугольника  $ABC$ .