

Четырёхугольники

1. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6, так, что угол в 60° у них общий, а остальные вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите гипотенузу треугольника.
2. (а) Существует ли трапеция, в которой разность боковых сторон равна разности оснований?
(б) Существуют ли две трапеции, основания первой из которых равны боковым сторонам второй, а основания второй — боковым сторонам первой?
3. Точки M и N , лежащие соответственно на сторонах BC и DA параллелограмма $ABCD$, таковы, что $BM = DN$. Докажите, что прямая MN проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.
4. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC , точка N — середина стороны CD , P — точка пересечения отрезков DM и BN . Докажите, что $\angle MAN = \angle BPM$.
5. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны. Докажите, что

$$AB - DE = EF - BC = CD - FA.$$

6. AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , в котором $\angle ABC = 45^\circ$. Точки O и H — соответственно центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC . Докажите, что прямая A_1C_1 проходит через середину отрезка OH .
7. Каждую сторону выпуклого четырёхугольника продолжили в обе стороны и на всех восьми продолжениях отложили равные между собой отрезки. Оказалось, что получившиеся 8 точек — внешние концы построенных отрезков — различны и лежат на одной окружности. Докажите, что исходный четырёхугольник — квадрат.