Степени вхождения простых чисел

Определение: Степенью вхождения простого числа p в натуральное число n будем называть наибольшее такое k, что n делится на p^k. Обозначать для краткости будем $\nu_p(n)$ (это греческая буква "ню")

Мудрый факт: $\nu_p(a+b) \geqslant \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$, причём если $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, то $\nu_p(a+b) = \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$.

Формула Лежандра.

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$$

1. Натуральные числа a и b таковы, что сумма $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a}$ целая. Докажите, что оба слагаемых целые.
2. Взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b, c удовлетворяют условию $ab = ac + bc$. Докажите, что abc — точный квадрат.
3. Натуральные числа a, b, c таковы, что число $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$ является целым. Верно ли, что abc — точный куб?
4. Докажите, что если числа ab, cd и $ac + bd$ делятся на k то ac и bd делятся на k.
5. Натуральные числа m, n таковы, что $m^2 + n^2 + m$ кратно mn. Докажите, что m — квадрат натурального числа.
6. Докажите, что наименьшее общее кратное чисел от n до $2n+1$ делится на $\dfrac{(2n+1)!}{n!n!}$.
7. Докажите, что не существует трёх различных натуральных чисел, каждое из которых равно наименьшему общему кратному своих разностей с двумя другими.
8. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Положим

$$b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2)\ldots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_n).$$

Докажите, что наименьшее общее кратное $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ делится на $(n-1)!$