

Алгебра и целые числа

1. Докажите, что при целых значениях m число

$$1 + 2m + 3m^2 + 4m^3 + 5m^4 + 4m^5 + 3m^6 + 2m^7 + m^8$$

является точным квадратом.

2. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b , удовлетворяющих равенству $(a + b)^2 = a^3 + b$.
3. Существуют ли такие целые числа a и b , что выполняется равенство $\frac{a+b}{a-b} = \frac{a^2}{b^2}$?
4. Найдите все тройки натуральных чисел $a < b < c$, для которых $b - a = c - b$ и $a^2 + b^2 + c^2 = b(b - a)^2$.
5. Натуральное число n таково, что $3n^2 + 3n + 1$ — точный квадрат. Докажите, что $\sqrt{3n^2 + 3n + 1}$ можно представить в виде суммы квадратов двух последовательных натуральных чисел.
6. Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство:

$$n \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) \geq (n+1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$