Веса-заряды

Во всех задачах некоторым объектам нужно присвоить веса (или заряды) и посмотреть, что происходит с этими весами при указанных в условии операциях, либо посмотреть на веса двумя разными способами.

1. В некоторые клетки прямоугольной клетчатой доски поставили фишки, при этом в каждой клетке стоит не более одной фишки. Известно, что для любой клетки, в которой есть фишка, количество фишек в её столбце равно количеству фишек в её строке. Докажите, что число строк доски, содержащих фишки, равно числу столбцов, содержащих фишки.

2. У каждого из восьмиклассников на кружке, не больше 20 друзей. Докажите, что их можно разделить на две группы 8(1) и 8(2) так, чтобы у каждого человека в группе 8(1) было не больше 15 друзей внутри группы, а у каждого человека в группе 8(2) было не больше 5 друзей внутри группы.

3. На бесконечной в одну сторону полоске клеток, пронумерованных натуральными числами, лежит несколько фишек (возможно несколько в одной клетке). Расположение фишек называется конечным, если в этом состоянии невозможно выполнить операцию.

(а) За одну операцию разрешается снять две фишки с клетки с номером k и добавить одну в клетку с номером $k+1$. Докажите, что конечное расположение для фиксированного начального положения фишек единственно.

Подсказка: каждой фишке, лежащей в клетке с номером n, присвойте вес 2^n.

(б) За одну операцию разрешается снять по одной фишке с клеток с номерами k и $k+1$ и добавить фишку в клетку с номером $k+2$. Докажите, что конечное состояние, в котором в каждой клетке лежит не более одной фишки, для фиксированного начального расположения фишек, единственно.

4. Несколько камней разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

5. В классе учатся m мальчиков и d девочек. У каждого мальчика есть хотя бы одна подруга, при этом у него количество подруг хотя бы вдвое больше, чем количество друзей у любой из его подруг. Докажите, что $d \geqslant 2m$.

6. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами $(i; j)$ и добавить по фишке в узлы $(i+1; j)$ и $(i; j+1)$ при этом запрещено попадание двух и более фишек в один узел.

(а) Докажите, что если изначально в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми.

(б) Докажите, что если изначально в узле $(0; 0)$ стоит фишка, то такими операциями нельзя сделать пустыми все шесть узлов с наименьшей суммой координат.

7. На плоскости расположены $n > 1$ окружностей радиуса 1, причём известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью, и никакая пара не касается. Докажите, что существует хотя бы n различных точек пересечения этих окружностей.

8. Можно ли за круглым столом рассадить 12 человек и поставить 28 бутылок на стол так, чтобы между любыми двумя людьми стояла бутылка?