Диагностическая работа, 2 этап

1. По окружности расставлены натуральные числа $1, 2, \dots, 14$ (именно в таком порядке). Окружность разрезана на $n < 14$ частей так, что суммы чисел, стоящих в этих частях, равны некоторым n последовательным натуральным числам. Найдите наибольшее возможное значение n. (Часть окружности состоит из нескольких стоящих подряд по окружности чисел.)

Решение. Сумма n чисел начиная с k равна $\frac{n\cdot(k+n-1)}{2}$, а сумма чисел от 1 до 14 равна 105. Получаем равенство $n\cdot(k+n-1) = 210$, то есть n является делителем числа 210. Наибольший делитель 210, меньший 14, — это 10.

Осталось привести пример разбиения чисел на 10 групп. Возьмём в одну группу числа от 1 до 5, а все остальные числа будут отдельными группами. Тогда получатся подряд идущие числа от 6 до 15.

2. Различные натуральные числа a и b таковы, что $\frac{ab}{a+b}$ является простым числом. Докажите, что $a+b$ — квадрат натурального числа.

Решение. Пусть данное выражение равно простому p. Заметим, что a или b обязательно делится на p; не умаляя общности пусть a. Обозначим $a = pk$ (для некоторого натурального k) и подставим в наше выражение:

$$\frac{ab}{a+b} = p;$$
$$\frac{pkb}{pk+b} = p;$$
$$kb = pk + b.$$

kb и pk делятся на k, значит, и b делится на k; также kb и b делятся на b, значит, и pk делится на b. В силу простоты p получаем 2 варианта: $b = k$ или $b = pk$. Второй вариант невозможен, так как в этом случае $a = b$; значит, $b = k$. Подставим в последнее полученное равенство и получим

$$b^2 = pb + b;$$
$$b = p+1 \quad \text{и} \quad a = p(p+1);$$
$$a+b = p(p+1) + p + 1 = (p+1)^2.$$

Из последнего равенства получаем, что $a+b$ является квадратом натурального числа.

3. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD \parallel BC$) такая, что $AB = BD$. Пусть M — середина стороны DC. Докажите, что $\angle MBC = \angle CAD$.

Решение. Отметим на луче BM за точкой M точку K такую, что $BM = MK$. Заметим, что в четырёхугольнике $DBCK$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, а следовательно, это параллелограмм. Тем самым DK параллельно BC и точка K лежит на прямой AD.

Из параллелограмма и равенства отрезков из условия получаем, что $CK = BD = BA$, а это значит, что четырёхугольник $ABCK$ является равнобокой трапецией. По свойству равнобокой трапеции $\angle CAD = \angle BKD$, а $\angle BKD = \angle CBM$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD.

4. На столе лежит 2022 карточки, на которых написаны натуральные числа от 1 до 2022 (каждое по одному разу). Петя и Вася ходят по очереди, первым ходит Петя. В свой ход игрок должен взять карточку так, чтобы сумма чисел на его карточках стала больше суммы чисел на карточках соперника. Кто *не может* сделать ход, *выигрывает*. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Приведём стратегию для Пети. Первым ходом он берёт 2021, и тогда у Васи остаётся только один вариант — взять 2022.

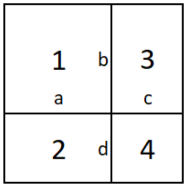
Следующими ходами Вася будет брать карточки 2019, 2018, 2015, 2014, …, 7, 6, то есть $4k-1, 4k-2$ для $k = 505, 504, \ldots, 2$. Покажем, что он сможет так делать. Заметим, что перед тем, как Вася берёт карточку $4k-1$, его сумма будет на 1 меньше Петиной, а значит, после этого хода Петя сможет взять только карточку $4k$, сделав разность равной 2 (все бóльшие карточки уже взяты); следующим ходом Вася возьмёт карточку $4k-2$, а Пете останется взять карточку $4k-3$, сделав разность опять равной 1.

Далее Петя может аналогично взять карточку 3, заставив Васю взять 4; а вот после этого у Пети ходов не останется, так как ни одна из карточек 1 или 2 не сможет перекрыть разность между суммами Васи и Пети, которая в этот момент равна 2. Таким образом, у Пети не будет хода и он выиграет.

5. Прямоугольное поле разделено 2022 вертикальными и 2022 горизонтальными прямыми на 2023^2 прямоугольных участка. На каждом участке работает либо рыцарь, который всегда говрит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый заявил, что площадь его участка больше площади участков соседних по стороне. Какое максимальное количество рыцарей может работать на поле?

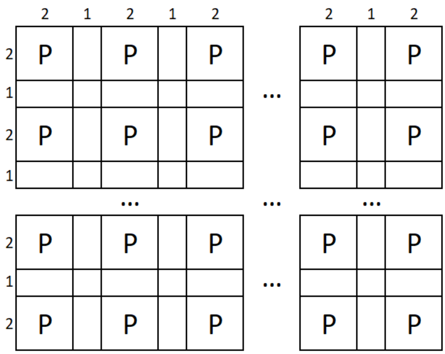
Решение. Ответ: 1012^2.

Рассмотрим произвольного рыцаря. Очевидно, что в соседних по стороне участках не могут работать рыцари. Покажем, что в соседнем по углу поле также не может работать рыцарь. Пусть на рисунке ниже на участке 1 работает рыцарь, тогда площадь участка 2 меньше, то есть $ab > ad$, или $b > d$. Домножим последнее неравенство на c и получим $bc > cd$, то есть площадь участка 3 больше площади участка 4, и следовательно там не может работать рыцарь.



Разобьём часть поля 2022×2022 на области 2×2 (имея в виду не длины сторон, а количества участков вдоль них), а оставшийся уголок на области 1×2 и одиночный участок в углу, всего 1012^2 областей. По доказанному ранее мы знаем, что в каждой такой области не более 1 рыцаря, то есть всего рыцарей не более 1012^2.

Осталось показать, что 1012^2 рыцарей могло быть. Разметим длины сторон участков и расставим рыцарей так, как показано на рисунке ниже. Тогда площади всех участков рыцарей равны 4, а площади остальных участков будут равны 1 или 2.



6. На сайте проходило голосование на самого популярного спортсмена. Всего было N кандидатов, каждый из которых представлял ровно один из трёх видов спорта: футбол, волейбол и хоккей. Пользователи, принявшие участие в голосовании, должны были выбрать по одному любимому спортсмену в каждом виде спорта.

После подведения итогов выяснилось, что у любых двух пользователей совпадает максимум один выбранный спортсмен, и для любого натурального k от 1 до 40 существует спортсмен, которого выбрали ровно k пользователей. Найдите наименьшее возможное N.

Решение. Ответ: 100.

Рассмотрим спортсмена, за которого проголосовало 40 человек. Не умаляя общности будем считать, что это футболист. Заметим, что у 40 пользователей, проголосовавших за данного спортсмена, все остальные выбранные спортсмены различны, а это значит, что и хоккеистов и волейболистов хотя бы по 40.

Теперь рассмотрим всех спортсменов, за которых проголосовало 21, 22, ..., 39 человек. Если хоть один из них не футболист, то по аналогии с предыдущим случаем мы получили бы, что футболистов хотя бы 21, и в сумме больше 100 спортсменов. А если все они футболисты, то футболистов хотя бы 20, и всего спортсменов хотя бы 100.

Теперь покажем, что пользователи могли так проголосовать в случае, когда спортсменов ровно 100. Обозначим хоккеистов $H_0, H_1, \dots, H_{39}$, волейболистов $V_0, V_1, \dots, V_{39}$, футболистов $F_{20}, F_{21}, \dots, F_{39}$. Рассмотрим все пары i и j такие, что $0 \leqslant i \leqslant 39$, $0 \leqslant j \leqslant 39$ и $20 \leqslant i + j \leqslant 39$. Пусть для каждой такой пары будет существовать ровно один пользователь который проголосовал за спортсменов H_i, V_i и F_{i+j}. Покажем, что данное голосование удовлетворяет условиям задачи.

Во-первых поймём, что ни у каких 2 пользователей нет более одного общего спортсмена. Для этого заметим, что если мы знаем двух спортсменов, за которых проголосовал пользователь, то мы знаем и третьего. Если мы знаем хоккеиста и волейболиста, то у футболиста номер будет равняться сумме номеров этих двух спортсменов, а если, например, известны хоккеист и футболист, то номер волейболиста равен разности номеров футболиста и хоккеиста (для футболиста и волейболиста аналогично). То есть если у пользователей совпадает хотя бы 2 спортсмена, то должны совпадать все 3, но по построению за каждую тройку спортсменов проголосовало не более 1 человека.

Во-вторых найдём 40 спортсменов, за которых проголосовало ровно 1, 2, …, 40 человек. Число k раскладывается в сумму двух целых неотрицательных слагаемых ровно $k + 1$ способом ($k = 0 + k, k = 1 + (k - 1), k = 2 + (k - 2), \dots, k = k + 0$), а следовательно за каждого F_k проголосовало ровно $k + 1$ человек (так мы нашли 20 спортсменов, за которых проголосовало ровно $21, 22, \dots, 40$ человек). Теперь посмотрим на спортсмена V_n, где $20 \leqslant n \leqslant 39$; заметим, что он встречается только в тройках $(V_n, H_0, F_n), (V_n, H_1, F_{n+1}), \dots, (V_n, H_{39-n}, F_{39})$, то есть за него проголосовали ровно $40 - n$ человек. Получаем, что за спортсменов $V_{39}, V_{38}, \dots, V_{20}$ проголосовали соответственно $1, 2, \dots, 20$ раз.

Оба условия задачи выполняются, значит, ровно 100 спортсменов могло быть.