Диагностическая работа

1. Дима и Саша весь день катались на метро и автобусе. Дима ездил по карте «Тройка», а Саша по карте «Единый». Цена проезда по карте «Тройка» на автобусе составляет 37 рублей, а на метро — 48 рублей. Цена проезда по карте «Единый» на автобусе и на метро одинакова и составляет 41 рубль.

Известно, что за день они совершили одинаковое количество поездок и потратили одинаковую сумму, меньшую 500 рублей. Сколько потратил один из них?

Ответ: 451.

Решение. Обозначим количество поездок Димы на автобусе за a, а количество поездок на метро за b. Тогда по условию задачи получаем следующее равенство:

$$37a + 48b = 41(a + b);$$
$$7b = 4a.$$

Из последнего равенства получаем, что $a = 7k$ и $b = 4k$ для некоторого натурального k. Тогда каждый из мальчиков потратил $451k$ рублей, и только при $k = 1$ эта сумма меньше 500, и равна 451.

2. Боря бегает быстрее Андрея, но медленнее Вовы (скорости всех постоянны). Все трое стартовали из одной точки одновременно в одном направлении, и пробежав каждый несколько кругов по стадиону, одновременно финишировали в том же самом месте. Оказалось, что Вова обогнал Андрея 11 раз. Сколько всего раз мальчики обгоняли друг друга? (Точки старта и финиша за обгон не считаются).

Ответ: 21.

Решение. Лемма. Если один из мальчиков пробежал a кругов, а второй — $a + b$, то между ними двумя произошёл ровно $b - 1$ обгон.

Доказательство леммы. В момент первого обгона второй обгонял первого на 1 круг, в момент второго обгона — на 2 круга, ..., в момент b-го обгона — на b кругов, но последняя точка является точкой финиша и по условию не считается. Значит, обгонов было ровно $b - 1$. *Лемма доказана.*

Обозначим количество кругов, которые пробежали Андрей, Боря и Вова, за a, b и c соответственно ($a < b < c$ по условию). По лемме общее количество обгонов равно $(b - a - 1) + (c - a - 1) + (c - b - 1) = 2(c - a) - 3$. Вова обгонял Андрея 11 раз, значит $a - c - 1 = 11$, то есть $2(c - a) - 3 = 2 \cdot 12 - 3 = 23$.

3. Найдите наименьшее натуральное N такое, что сумма 11 подряд идущих натуральных чисел, начинающихся с N, делится на 13, а сумма 13 подряд идущих натуральных чисел, начинающихся с N, делится на 11.

Ответ: 60.

Решение. Сумма k подряд идущих натуральных чисел начиная с N равна $kN + \frac{k(k-1)}{2}$. По условию

$$11N + 11 \cdot 5 \mathrel{\vdots} 13 \quad \text{и} \quad 13N + 13 \cdot 6 \mathrel{\vdots} 11.$$

Так как 11 и 13 взаимно просты, получаем

$$N + 5 \mathrel{\vdots} 13 \quad \text{и} \quad N + 6 \mathrel{\vdots} 11.$$

Перебирая числа, кратные 13, по возрастанию, находим, что наименьшие заначения для $N + 5$ и $N + 6$ равны 65 и 66. Получаем ответ $N = 60$.

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами с двусторонним движением. Известно, что среди любых 80 городов найдутся два таких, что из одного можно попасть в другой, проехав по одной или нескольким дорогам.

Министр транспорта хочет открыть несколько новых дорог так, чтобы из каждого города стало возможно доехать по дорогам до любого другого. Какого наименьшего количества новых дорог для этого гарантированно хватит?

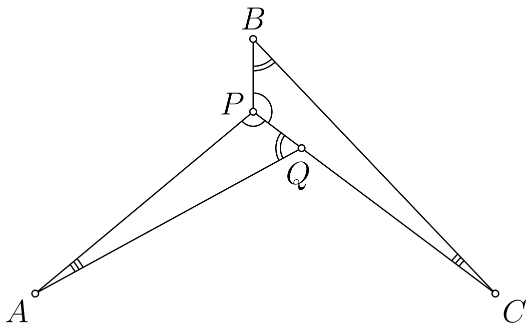
Ответ: 78.

Решение. Представим данную конструкцию в виде графа, вершины — города, рёбрами соединены города, между которыми есть дорога. Из условия понимаем, что в графе максимум 79 компонент связности. Действительно, если бы их было хотя бы 80, то можно было бы выбрать по одной вершине из разных компонент связности, и для них не выполнялось бы условие задачи.

Очевидно, что для последовательного соединения всех компонент потребуется не более 78 рёбер, и граф станет связным.

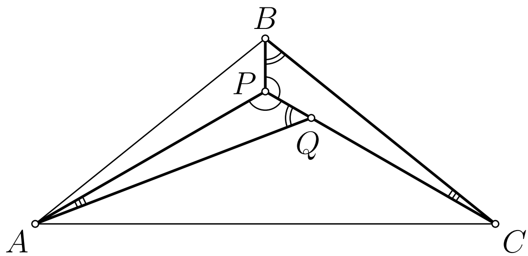
Осталось привести пример графа, в котором менее чем 78 добавленных ребер не хватит. Пусть у нас есть ровно 80 вершин, и только две из них соединены между собой — очевидно, такой граф удовлетворяет условию. Будем проводить добавленные ребра (т. е. новые дороги, построенные министром) по одному. Каждое ребро может уменьшать количество компонент связности на 1, если оно соединяет две компоненты, либо не менять это количество. Изначально компонент 79, а в конце должна остаться одна. Следовательно, менее чем 78 ребер не могло быть добавлено.

5. Даны два равных треугольника APQ и CPB, расположенных так, как показано на рисунке. Сколько градусов составляет угол PAQ, если известно, что $\angle BAC = \angle BCA = 37°$?



Ответ: 7.

Решение.



Проведём отрезки AB и AC. Поскольку $\angle BAC = \angle BCA = 37°$, треугольник ABC является равнобедренным, $AB = BC$.

Заметим, что треугольник APB равен треугольнику CPB по трём сторонам: PB — общая сторона, $AB = BC$, $AP = PC$ из равенства треугольников APQ и CPB. Тогда $\angle BAP = \angle PCB = \angle PAQ$ и $\angle APB = \angle BPC = \angle APQ = \frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$.

Поскольку $AP = PC$, треугольник APC является равнобедренным с углом $120°$, поэтому $\angle PAC = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$. Следовательно,

$$\angle PAQ = \angle BAP = \angle BAC - \angle PAC = 37° - 30° = 7°.$$

6. Андрей, Борис, Вадим и Гриша купили в магазине конфеты. Известно, что

- каждый из них купил хотя бы одну конфету;
- все ребята купили разное количество конфет;
- Андрей купил на 7 конфет больше Бориса, а Вадим купил на 5 конфет больше Гриши;
- у двух ребят, которые купили больше всех конфет, в сумме 23 конфеты.

Сколько всего конфет купили ребята? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 30, 32, 34.

Решение. Заметим, что есть три варианта для пары ребят которые купили больше всех: Андрей и Борис, Вадим и Гриша, Андрей и Вадим. Разберём все 3 случая.

Первый случай, Андрей и Вадим купили больше всех. По условию получаем, что у них в сумме 23 конфеты, а у Бориса и Гришы в сумме $23 - 5 - 7 = 11$ конфет. В сумме получаем 34 конфеты. Заметим, что есть множество вариантов, сколько именно купил каждый из ребят в этом случае. Например, Андрей мог купить 13 конфет, Борис — 6, Вадим — 10, Гриша — 5.

Второй случай, Андрей и Борис купили больше всех. В сумме у них 23 конфеты, а разность их количеств равна 7, значит, Андрей купил 15 конфет, а Борис — 8. Заметим, что для Вадима и Гриши осталось два варианта: Вадим — 7 конфет, Гриша — 2, или Вадим — 6 конфет, Гриша — 1. Получаем, что в сумме у ребят 32 или 30 конфет.

Третий случай, Вадим и Гриша купили больше всех. В сумме у них 23 конфеты, а разность их количеств равна 5, значит, Вадим купил 14 конфет, а Борис — 9. Для Андрея и Бориса остаётся только один вариант: Андрей купил 8 конфет, Борис — 1. Получаем, что в сумме у ребят 32 конфеты.

Всего получаем 3 варианта, 30, 32 или 34 конфеты в сумме.

7. У Пети и Васи есть несколько коллекционных марок, каждая стоит целое число рублей. Общая стоимость Петиных марок в 22 раза больше общей стоимости Васиных марок. После того, как Петя отдал свою самую дешёвую марку Васе, суммарная стоимость его марок стала в 17 больше суммарной стоимости Васиных марок. Какое наибольшее количество марок могло быть у Пети изначально?

Ответ: 79.

Решение. Обозначим стоимость самой дешёвой марки у Пети за a, а суммарную стоимость всех Васиных марок за s. Тогда из условия получаем

$$22s - a = 17(s + a);$$

$$5s = 18a;$$

$$22s = \frac{396}{5}a.$$

Другими словами, $22s < 80a$, то есть изначально у Пети было не более 79 марок (т. к. a — стоимость наименьшей марки).

Осталось привести пример с 79 марками у Пети. Если не требовать, чтобы все марки стоили по-разному, то можно дать Пете 78 марок по 5 рублей и одну за 6 рублей, а Васе одну марка ценой 18 рублей. Несложно заметить, что данные величины удовлетворяют условию. Также можно подобрать марки с разными стоимостями, например, взяв стоимости Петиных марок за 50 000, 50 001, …, 50 077 и 56 997, а Васе выдав одну марку ценой 180 000.

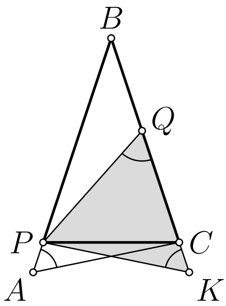
8. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили точки P и Q соответственно. Известно, что

$$BP = BC, \quad PQ = AC = 21, \quad QC = 12, \quad \angle BAC = \angle PQC = 60°.$$

Найдите длину отрезка AP.

Ответ: 9.

Решение. Отметим на луче BC точку K такую, что $BA = BK$. Тогда и $AP = CK$.



Заметим, что треугольники PCA и CPQ равны по двум сторонам ($AP = KC$, PC — общая сторона) и углу между ними ($\angle CPA = \angle PCK$ — смежные с равными углами при основании равнобедренного треугольника). Следовательно, $PK = CA = 21$ и $\angle PAC = \angle CKP = 60°$.

В треугольнике PQK углы при вершинах Q и K равны 60°, поэтому он является равносторонним, и $PK = PQ = QK = 21$. Следовательно, $AP = CK = QK - QC = 21 - 12 = 9$.

9. Все натуральные делители числа n выписали в ряд: $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Известно, что $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = 4368$ и $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} = \frac{52}{15}$. Найдите, чему равно n.

Ответ: 1260.

Решение. Рассмотрим последоваетльность $\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots, \frac{n}{d_k}$; заметим, что это та же последовательность, что и $d_1, d_2, \ldots, d_k$ только записанная в обратном порядке.

Домножим равенство $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} = \frac{52}{15}$ на n и получим

$$\frac{52}{15}n = \frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \ldots + \frac{n}{d_k} = d_k + d_{k-1} + \ldots + d_1 = 4368.$$

Извлекаем $n = \frac{4368 \cdot 15}{52} = 1260$.

10. Сколькими способами можно раздать 4 яблока, 5 груш и 7 апельсинов 3 ребятам так, чтобы у каждого апельсинов было не меньше, чем яблок. (Не обязательно каждый должен что-то получить. Все фрукты нужно раздать).

Ответ: 3150.

Решение. Сперва поймём, сколько есть способов раздать 4 яблока 3 ребятам. Для этого воспользуемся методом шаров и перегородок. Поставим в ряд 4 шара и 2 перегородки, тогда первому даём столько яблок, сколько шаров до 1 перегородки, второму — сколько шаров между 1 и 2 перегородками, а третьему — сколько шаров после 2 перегородки. Получаем, что искомое количество способов равно количеству способов поставить в ряд 4 шара и 2 перегородки, или, другими словами, способов из 6 позиций выбрать 2, где будут стоять перегородки, то есть $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ вариантов.

После того как раздали всем яблоки, аналогично раздаём всем груши ($\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способ).

Чтобы у каждого апельсинов было не меньше, чем яблок, необходимо каждому сначала выдать столько апельсинов, сколько у того яблок, то есть раздать некоторым фиксированным образом суммарно 4 апельсина, а оставшиеся 3 раздать произвольно ($\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ способов). Всего $15 \cdot 21 \cdot 10 = 3150$ вариантов.