

Программа зачёта

Почти ко всем вопросам прикреплена ссылка на листик в Хеопсе, там, как правило, есть разбор. К некоторым вопросам ссылки нет, потому что это разбиралось в Сириусе.

Во всех теоретических вопросах нужно знать не только формулировку, но и доказательство.

Теория

Алгебра

1. Сравнения по модулю, основные свойства сравнений. [Список свойств](#).
2. Последовательность остатков степеней двойки 2^n при делении на простое p зацикливается, причём без предпериода. [Листик](#).
3. Для целых a и b выполнено равенство $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b - a)$.
4. Линейное представление НОД: для любых целых чисел a и b найдутся целые числа x и y такие, что $ax + by = \text{НОД}(a, b)$.
5. Теорема Вильсона.
6. Число сочетаний. Явная формула. Число сочетаний, как количество путей между двумя точками на «сетке», треугольник Паскаля. Бином Ньютона. Комбинаторное и алгебраическое вычисление $\sum_{k=0}^n C_n^k$. [Листик](#).
7. Степень вхождения двойки в сумму и произведение двух чисел. [Листик](#).

Геометрия

1. Четвёртый признак равенства треугольников: если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то либо эти треугольники либо равны, либо $\angle C + \angle C_1 = 180^\circ$.
2. Выражение углов между биссектрисами (и внутренними, и внешними) через углы треугольника. [Листик](#).
3. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника. [Листик](#).

Комбинаторика

1. Принцип зацикливания, принцип зацикливания без предпериода. [Листик](#).
2. Деревья: эквивалентные определения и основные свойства. Остовное дерево, существование остовного дерева в связном графе. [Листик](#).
3. Подвешивание за вершину. Структура графа после подвешивания: какие вершины входят в k -ый уровень, какие вершины могут быть соединены ребром.

- Критерий двудольности графа: граф является двудольным тогда и только тогда, когда все циклы в графе имеют чётную длину.
- Критерий существования эйлера цикла в графе. Доказательство того, что если в графе $2k$ вершин нечётной степени, то рёбра графа можно разбить на k путей. [Листик](#).

Задачи

Алгебра

- Докажите, что дробь $\frac{1}{n}$ для любого $n > 1$ можно представить в виде суммы двух различных дробей такого же вида. [Листик](#).

- Вычислите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

[Листик](#).

- Найдите НОД($2^m - 1, 2^n - 1$) для натуральных m и n .
- Даны целые a, b, c, d . Обозначим $n = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. Докажите, что существуют такие целые x, y , что $n = x^2 + y^2$. [Листик](#).
- Докажите, что сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ не является целым числом ни при каком $n \geq 2$. [Листик](#).
- Существуют ли 100 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого числа делится на каждое другое? [Листик](#).
- Докажите, что найдётся число Фибоначчи, которое делится на любое заданное число m . [Листик](#).
- Комбинаторное и алгебраическое доказательства равенства $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$. [Листик 1](#), [Листик 2](#).
- Докажите, что для любых натуральных m и n справедливо равенство $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$. [Листик](#).
- Комбинаторное и алгебраическое доказательства равенства

$$C_m^0 + C_{m+1}^1 + \dots + C_{m+n}^n = C_{m+n+1}^n.$$

[Листик](#).

- Все делители натурального числа N выписали в ряд по убыванию: $d_1 > d_2 > \dots > d_k$. Оказалось, что в каждой паре делителей, одинаково удалённых от концов этого ряда, больший делитель делится на меньший (т.е. d_1 делится на d_k , d_2 на d_{k-1} , и т.д.). Докажите, что в любой паре делителей числа N больший делитель делится на меньший. [Листик](#).

Геометрия

1. Внутри острого угла с вершиной в точке O отмечены точки M и N , а на сторонах угла — точки P и Q такие, что $\angle MOP = \angle NOQ$ и точка O лежит на биссектрисах внешних углов при вершинах P и Q треугольников MPN и MQN соответственно. Докажите, что длины ломаных MPN и MQN равны. **Листик.**
2. Дан треугольник ABC , на сторонах AB и AC которого отмечены точки X и Y соответственно так, что $BX + CY = BC$. Докажите, что точки X и Y равноудалены от точки пересечения биссектрис треугольника.
3. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC . Докажите, что $2AM \leq AB + AC$.
4. Выпуклый многоугольник M лежит внутри выпуклого многоугольника N . Докажите, что периметр M не больше периметра N . **Листик.**
5. В треугольнике ABC с углом B , равным 120° , проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$. **Листик.**
6. Угол B треугольника ABC равен 120° . На биссектрисе угла B отметили такую точку I , что $\angle AIC = 150^\circ$. Докажите, что I — центр вписанной окружности треугольника ABC . **Листик.**
7. На какое наименьшее количество треугольников можно разрезать (не обязательно диагоналями) выпуклый n -угольник? **Листик.**
8. Бильярдный шар отражается по закону «угол падения равен углу отражения». Верно ли что внутри любого остроугольного треугольника существует периодическая треугольная траектория шара? А сколько их всего может существовать? **Листик.**
9. Дан квадратный бильярд со стороной 1. Шар вылетел из левого нижнего угла и ударился о правую стенку на высоте $\frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что шар попадёт в лузу. В какую именно в зависимости от m и n ? **Листик.**

Комбинаторика

1. В связном графе есть вершина степени n . Докажите, что в этом графе можно выделить n вершин так, чтобы при удалении любого набора из этих вершин, граф оставался связным.
2. В графе степени всех вершин равны 3 и между любыми двумя вершинами существует путь длиной не более 2. Какое наибольшее число вершин может быть в этом графе?
3. Леша нарисовал на доске N точек (никакие три не лежат на одной прямой) и соединил некоторые пары из них отрезками. Если какие-то два отрезка пересекаются, то Сережа может их стереть и нарисовать другие два отрезка с теми же концами. Докажите, что после нескольких таких операций пересекающихся отрезков не останется. **Листик.**

4. За круглым столом сидит четное количество чебурашек. У каждого из них есть несколько шариков, причем у любых двух рядом сидящих чебурашек количество шариков отличается не больше, чем на 1. Докажите, что найдется пара чебурашек, сидящих напротив друг друга, у которых количество шариков отличается не больше, чем на 1. [Листик](#).
5. В выпуклом n -угольнике ($n > 3$) отметили все точки пересечения диагоналей. Известно, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько точек было отмечено? [Листик](#).
6. Дано натуральное число n . Докажите, что количество способов разбить n на не более чем k слагаемых, совпадает с числом способов разбить число n на слагаемые, каждое из которых не превосходит k . [Листик](#).
7. Сколько существует слов длины n , состоящих только из букв A и B , у которых в записи
 - (а) нет двух букв B подряд?
 - (б) количество букв B не превосходит номера самой первой буквы B ? [Листик](#).
8. Докажите, что при $n > 2$ количество способов разрезать клетчатый квадрат $n \times n$ на доминошки делится на 4. [Листик](#).
9. Даны n различных чисел. Докажите, что среди их попарных сумм есть хотя бы $2n - 3$ различных. [Листик](#).
10. Имеется шоколадка $m \times n$. За один ход можно съесть дольку, а также все дольки, которые находятся выше, правее, а также выше и правее выбранной. Проигрывает тот, кто откусывает последнюю дольку. Кто выигрывает при правильной игре? [Листик](#).
11. На доске записано несколько натуральных чисел. Каждую минуту Леша стирает с доски какие-то два числа и записывает вместо них их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что когда-нибудь числа на доске перестанут меняться. [Листик](#).
12. В углу шахматной доски 8×8 стоит фишка. Петя и Вася двигают фишку по очереди, начинает Петя. Он делает фишкой один ход как ферзём (пройденной считается только клетка, куда в итоге переместилась фишка), а Вася — два хода как королем (обе клетки считаются пройденными). Нельзя ставить фишку на клетку, где она уже бывала (включая исходную клетку). Кто не сможет сделать ход — проигрывает. Кто из ребят может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник? [Листик](#).
13. Какое наименьшее число ребер можно удалить из полного графа на n вершинах, чтобы он стал несвязен? [Листик](#).