Программа зачёта

Почти ко всем вопросам прикреплена ссылка на листик в Хеопсе, там, как правило, есть разбор. Но что-то разбиралось на программе в Сириусе, к этим вопросам прикреплена ссылка на другие источники (как правило, Сириус.Курсы).

Во всех теоретических вопросах нужно знать не только формулировку, но и доказательство.

Теория

Алгебра

1. Сравнения по модулю, основные свойства сравнений. Список свойств.
2. Последовательность остатков степеней двойки 2^n при делении на простое p зацикливается, причём без предпериода. Листик.
3. Для целых a и b выполнено равенство $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b - a)$. Сириус.Курсы.
4. Линейное представление НОД: для любых целых чисел a и b найдутся целые числа x и y такие, что $ax + by = \text{НОД}(a, b)$. Сириус.Курсы.
5. Теорема Вильсона. Сириус.Курсы 1, Сириус.Курсы 2.
6. Число сочетаний. Явная формула. Число сочетаний, как количество путей между двумя точками на «сетке», треугольник Паскаля. Бином Ньютона. Комбинаторное и алгебраическое вычисление $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$. Листик.
7. Степень вхождения двойки в сумму и произведение двух чисел. Листик.

Геометрия

1. Четвёртый признак равенства треугольников: если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то либо эти треугольники либо равны, либо $\angle C + \angle C_1 = 180°$. Сириус.Курсы.
2. Выражение углов между биссектрисами (и внутренними, и внешними) через углы треугольника. Листик.
3. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника. Листик.

Комбинаторика

1. Принцип зацикливания, принцип зацикливания без предпериода. Листик.
2. Деревья: эквивалентные определения и основные свойства. Остовное дерево, существование остовного дерева в связном графе. Листик.

3. Подвешивание за вершину. Структура графа после подвешивания: какие вершины входят в k-ый уровень, какие вершины могут быть соединены ребром. Сириус.Курсы.

4. Критерий двудольности графа: граф является двудольным тогда и только тогда, когда все циклы в графе имеют чётную длину. Сириус.Курсы.

5. Критерий существования эйлерова цикла в графе. Доказательство того, что если в графе $2k$ вершин нечётной степени, то рёбра графа можно разбить на k путей. Листик.

Задачи

Алгебра

1. Докажите, что дробь $\frac{1}{n}$ для любого $n > 1$ можно представить в виде суммы двух различных дробей такого же вида. Листик.

2. Вычислите сумму
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$
Листик.

3. Найдите НОД$(2^m-1, 2^n-1)$ для натуральных m и n. Сириус.Курсы.

4. Даны целые a, b, c, d. Обозначим $n=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$. Докажите, что существуют такие целые x, y, что $n=x^2+y^2$. Листик.

5. Докажите, что сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ не является целым числом ни при каком $n \geqslant 2$. Листик.

6. Существуют ли 100 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого числа делится на каждое другое? Листик.

7. Докажите, что найдётся число Фибоначчи, которое делится на любое заданное число m. Листик.

8. Комбинаторное и алгебраическое доказательства равенства $F_{m+n}=F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1}$. Листик 1, Листик 2.

9. Докажите, что для любых натуральных m и n справедливо равенство $(F_m, F_n)=F_{(m,n)}$. Листик.

10. Комбинаторное и алгебраическое доказательства равенства
$$C_m^0+C_{m+1}^1+\ldots+C_{m+n}^n=C_{m+n+1}^n.$$
Листик.

11. Все делители натурального числа N выписали в ряд по убыванию: $d_1 > d_2 > \ldots > d_k$. Оказалось, что в каждой паре делителей, одинаково удалённых от концов этого

ряда, больший делитель делится на меньший (т.е. d_1 делится на d_k, d_2 на d_{k-1}, и т. д.). Докажите, что в любой паре делителей числа N больший делитель делится на меньший. Листик.

Геометрия

1. Внутри острого угла с вершиной в точке O отмечены точки M и N, а на сторонах угла — точки P и Q такие, что $\angle MOP = \angle NOQ$ и точка O лежит на биссектрисах внешних углов при вершинах P и Q треугольников MPN и MQN соответственно. Докажите, что длины ломаных MPN и MQN равны. Сириус.Курсы.

2. Дан треугольник ABC, на сторонах AB и AC которого отмечены точки X и Y соответственно так, что $BX + CY = BC$. Докажите, что точки X и Y равноудалены от точки пересечения биссектрис треугольника. Сириус.Курсы.

3. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. Докажите, что $2AM \leqslant AB+AC$. Сириус.Курсы.

4. Выпуклый многоугольник M лежит внутри выпуклого многоугольника N. Докажите, что периметр M не больше периметра N. Листик.

5. В треугольнике ABC с углом B, равным $120°$, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90°$. Листик.

6. Угол B треугольника ABC равен $120°$. На биссектрисе угла B отметили такую точку I, что $\angle AIC = 150°$. Докажите, что I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Листик.

7. На какое наименьшее количество треугольников можно разрезать (не обязательно диагоналями) выпуклый n-угольник? Листик.

8. Бильярдный шар отражается по закону «угол падения равен углу отражения». Верно ли что внутри любого остроугольного треугольника существует периодическая треугольная траектория шара? А сколько их всего может существовать? Листик.

9. Дан квадратный бильярд со стороной 1. Шар вылетел из левого нижнего угла и ударился о правую стенку на высоте $\frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что шар попадёт в лузу. В какую именно в зависимости от m и n? Листик.

Комбинаторика

1. В связном графе есть вершина степени n. Докажите, что в этом графе можно выделить n вершин так, чтобы при удалении любого набора из этих вершин, граф оставался связным.

2. В графе степени всех вершин равны 3 и между любыми двумя вершинами существует путь длиной не более 2. Какое наибольшее число вершин может быть в этом графе?

3. Леша нарисовал на доске N точек (никакие три не лежат на одной прямой) и соединил некоторые пары из них отрезками. Если какие-то два отрезка пересекаются, то Сережа может их стереть и нарисовать другие два отрезка с теми же концами. Докажите, что после нескольких таких операций пересекающихся отрезков не останется. Листик.

4. За круглым столом сидит четное количество чебурашек. У каждого из них есть несколько шариков, причем у любых двух рядом сидящих чебурашек количество шариков отличается не больше, чем на 1. Докажите, что найдется пара чебурашек, сидящих напротив друг друга, у которых количество шариков отличается не больше, чем на 1. Листик.

5. В выпуклом n-угольнике ($n > 3$) отметили все точки пересечения диагоналей. Известно, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько точек было отмечено? Листик.

6. Дано натуральное число n. Докажите, что количество способов разбить n на не более чем k слагаемых, совпадает с числом способов разбить число n на слагаемые, каждое из которых не превосходит k. Листик.

7. Сколько существует слов длины n, состоящих только из букв A и B, у которых в записи
   (а) нет двух букв B подряд?
   (б) количество букв B не превосходит номера самой первой буквы B? Листик.

8. Докажите, что при $n > 2$ количество способов разрезать клетчатый квадрат $n \times n$ на доминошки делится на 4. Листик.

9. Даны n различных чисел. Докажите, что среди их попарных сумм есть хотя бы $2n-3$ различных. Листик.

10. Имеется шоколадка $m \times n$. За один ход можно съесть дольку, а также все дольки, которые находятся выше, правее, а также выше и правее выбранной. Проигрывает тот, кто откусывает последнюю дольку. Кто выигрывает при правильной игре? Листик.

11. На доске записано несколько натуральных чисел. Каждую минуту Леша стирает с доски какие-то два числа и записывает вместо них их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что когда-нибудь числа на доске перестанут меняться. Листик.

12. В углу шахматной доски 8×8 стоит фишка. Петя и Вася двигают фишку по очереди, начинает Петя. Он делает фишкой один ход как ферзём (пройденной считается только клетка, куда в итоге переместилась фишка), а Вася — два хода как королем (обе клетки считаются пройденными). Нельзя ставить фишку на клетку, где она уже бывала (включая исходную клетку). Кто не сможет сделать ход — проигрывает. Кто из ребят может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник? Листик.

13. Какое наименьшее число ребер можно удалить из полного графа на n вершинах, чтобы он стал несвязен? Листик.