Летние сборы в «Команде»

Содержание

Часть I

Алгебра

Ферма и Эйлер

Малая теорема Ферма (1). Пусть p — простое число, a не делится на p. Тогда

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Малая теорема Ферма (2). Пусть a — целое, а p — простое. Тогда

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

1. **(а)** Докажите, что C_p^l делится на p, где p — простое число, а $l < p$ — натуральное.
   (б) Выведите отсюда малую теорему Ферма с помощью индукции и бинома Ньютона.

2. **(а)** Докажите, что если a и p взаимно просты, то множество остатков чисел $1 \cdot a$, $2 \cdot a$, …, $(p-1) \cdot a$ при делении на p совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, p-1\}$.
   (б) Выведите отсюда малую теорему Ферма.

3. **(а)** Сколько существует способов раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Раскраски, совмещающиеся поворотом, считаются одинаковыми.)
   (б) Выведите малую теорему Ферма.

4. **(а)** В графе, вершинам которого соответствуют различные ненулевые остатки от деления на p, проведём из каждого остатка r стрелку в остаток ra. Докажите, что этот граф разбивается на простые ориентированные циклы.
   (б) Задумавшись о длинах образующихся ориентированных циклов, выведите малую теорему Ферма.

5. Верно ли, что если для натурального $k > 1$ и всех целых a выполнено $a^k \equiv a \pmod k$, то k — простое число?

Определение. Пусть n — натуральное число. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ определяется как количество чисел, не превосходящих n, взаимно простых с n.

Теорема Эйлера. Натуральные a и n взаимно просты. Тогда $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$.

6. Докажите теорему Эйлера, повторив рассуждения из задачи **(а)** 2; **(б)** 4.

7. **(а)** Пусть p и q — различные простые числа. Найдите $\varphi(p^\alpha)$ и $\varphi(pq)$.

   (б) Докажите, что если a и b взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

   (в) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$. Докажите, что $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

8. **Усиление теоремы Эйлера.** Пусть $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — разложение m на простые множители, $s = \text{НОК}\big(\varphi(p_1^{\alpha_1}), \varphi(p_2^{\alpha_2}), \ldots, \varphi(p_k^{\alpha_k})\big)$. Докажите, что для любого целого a, взаимно простого с m, верно $a^s \equiv 1 \pmod m$.

Добавка по функции Эйлера, 7–1

1. Найдите, чему равны суммы
(а) $\sum_{n \,\vdots\, d} \varphi(d)$, **(б)** $\sum\limits_{\substack{d \leqslant n \\ (n,d)=1}} d$.

Ферма и Эйлер. Задачи. 7–1

1. Докажите, что число $99^{100} + 100^{99}$ составное.

2. Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что $\underbrace{111\ldots11}_{p-1} \mathrel{\vdots} p$.

3. Докажите, что $2^{n!} - 1 \mathrel{\vdots} n$ для любого нечётного натурального n.

4. При каких простых p число $5^{p^2} + 1$ делится на p?

5. Пусть p и q — различные простые числа. Какой остаток даёт число $p^q + q^p$ при делении на pq?

6. При каких натуральных n число $n^2 + n + 1$ делится на 101?

7. Бесконечно ли множество чисел вида вида $2^n - 1$, у которых более миллиона различных простых делителей?

8. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^{504} + b^{504} + c^{504} \mathrel{\vdots} 2018$. Докажите, что и $abc \mathrel{\vdots} 2018$.

9. **(а)** Докажите, что для любого простого числа p вида $4k + 3$ не существует целых чисел n таких, что $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

   (б) Докажите, что для любого простого числа p вида $4k + 1$ существует целое число n такое, что $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

10. Докажите, что для любого простого p найдётся делящееся на него число вида $6^n + 3^n + 2^n - 1$.

Ферма и Эйлер. Добавка. 7–1

1. Докажите, что простых чисел вида $4k+1$ бесконечно много.
2. Докажите, что $\underbrace{2^{2^{\cdots^{2^2}}}}_{n} - \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{n-1}$ делится на все числа от 1 до n.
3. Докажите, что для любого натурального n существует число с суммой цифр n, делящееся на n.
4. Натуральное число n таково, что $\varphi(n) \neq \varphi(m)$ при всех натуральных $m \neq n$. Докажите, что n делится на 43.

Ферма и Эйлер. Задачи. 7–2

1. Докажите, что число $99^{100} + 100^{99}$ составное.

2. Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что $\underbrace{111\ldots11}_{p-1} \vdots\, p$.

3. Докажите, что $2^{n!} - 1 \,\vdots\, n$ для любого нечётного натурального n.

4. Бесконечно ли множество чисел вида вида $2^n - 1$, у которых более миллиона различных простых делителей?

5. При каких простых p число $5^{p^2} + 1$ делится на p?

6. **(а)** Докажите, что $n^{84} - n^4 \,\vdots\, 20400$ для любого натурального n.
(б) Можно ли 20400 заменить на какое-нибудь большее число, чтобы утверждение осталось верным?

7. При каких натуральных n число $n^2 + n + 1$ делится на 101?

8. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^{504} + b^{504} + c^{504} \,\vdots\, 2018$. Докажите, что и $abc \,\vdots\, 2018$.

9. Пусть p и q — различные простые числа. Какой остаток даёт число $p^q + q^p$ при делении на pq?

10. **(а)** Докажите, что для любого простого числа p вида $4k + 3$ не существует целых чисел n таких, что $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

(б) Докажите, что для любого простого числа p вида $4k + 1$ существует целое число n такое, что $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Китайская теорема об остатках

Теорема. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — попарно взаимно простые числа, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторый набор остатков по соответствующим модулям. Тогда существует такое A, что $A \equiv a_i \pmod{m_i}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Более того, все такие A сравнимы по модулю $m_1 m_2 \ldots m_n$.

1. Найдите наименьшее натуральное число, которое даёт остаток 1 при делении на 2, остаток 2 при делении на 3, …, остаток 9 при делении на 10.

2. Найдите все натуральные числа a, не превосходящие 200, удовлетворяющие системе сравнений:

(а) $\begin{cases} a \equiv 3 \pmod{8}, \\ a \equiv 7 \pmod{15}, \end{cases}$ **(б)** $\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{3}, \\ a \equiv 3 \pmod{5}, \\ a \equiv 4 \pmod{7}. \end{cases}$

3. **(а)** Пусть m_1, m_2 — взаимно простые числа; a_1, a_2 — некоторые остатки при делении на m_1, m_2 соответственно. Докажите, что среди чисел от 1 до $m_1 m_2$ существует ровно одно дающее остаток a_1 при делении на m_1 и дающее остаток a_2 при делении на m_2.
(б) Докажите КТО по индукции.

4. **(а)** Натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Придумайте явную формулу для числа x через $m_1, m_2, \ldots, m_n$, чтобы были выполнены сравнения:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod m_1, \\ x \equiv 0 \mod m_2, \\ \ldots \\ x \equiv 0 \mod m_n. \end{cases}$$

Подсказка: теорема Эйлера вам в помощь.
(б) Придумайте явно число x (выразите через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $m_1, m_2, \ldots, m_n$), удовлетворяющее КТО.

5. Пусть p и q — различные нечётные простые числа. Сколько решений имеет сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod{pq}$ среди чисел от 0 до $pq - 1$?

6. Пусть $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$, где p_i — различные простые числа. Для каждого t, $1 \leqslant t \leqslant s$, найдите, сколько существует чисел от 1 до N, которые делятся на $p_1, p_2, \ldots, p_t$, но не делятся на $p_{t+1}, p_{t+2}, \ldots, p_s$.

7. Докажите, что найдутся 2023 последовательных натуральных числа, каждое из которых имеет по меньшей мере три различных простых делителя.

8. Докажите, что любые 35 подряд идущих целых чисел можно расставить в прямоугольнике 7×5 так, что разность чисел, стоящих в любых двух соседних по стороне клетках, делится или на 7, или на 5.

9. Дано конечное множество A натуральных чисел. Докажите, что существует натуральное число b такое, что для каждого $a \in A$ число ab будет степенью натурального числа.

10. Пусть n — натуральное число, а $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ — простые числа. Обозначим через P_m произведение первых m из них. Докажите, что существует натуральное число k такое, что для каждого i от 1 до n числа P_n и $k + P_i$ взаимно просты.

Китайская теорема об остатках. Задачи посложнее. 7–1

1. Докажите, что для каждого натурального n существует n подряд идущих натуральных чисел, ни одно из которых не является натуральной степенью (отличной от первой) натурального числа.

2. Дано натуральное n и *различные* целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($k \geqslant 2$) от 1 до n. Известно, что n делит $a_i(a_{i+1} - 1)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Докажите, что n не делит $a_k(a_1 - 1)$.

3. **(а)** Докажите, что числа вида $t^2 + t + 1$ имеют бесконечно много простых делителей.

(б) Докажите, что существует t такое, что $t^2 + t + 1$ имеет хотя бы 2023 различных простых делителя.

4. При изготовлении елочной гирлянды электрик Петров сделал на куске провода отметки, делящие его на 113 одинаковых кусков, и ушёл погулять. В это время электрик Иванов разметил тот же провод на 137 одинаковых кусков и пошёл туда же. В это время вернувшийся с прогулки электрик Сидоров быстро разрезал провод по всем отметкам. Куски какого размера у него получились, и сколько получилось кусков каждого вида?

5. Дано натуральное число n. Известно, что существуют такие пять последовательных натуральных чисел, что ни одно из них не делится на n, но их произведение кратно n. Докажите, что существуют такие четыре последовательных натуральных числа, что ни одно из них не делится на n, но их произведение кратно n.

6. Пусть p и q — два простых числа, отличающихся не более чем в два раза. Докажите, что существуют два последовательных натуральных числа, у одного из которых наибольший простой делитель равен p, а у другого — q.

Уравнения в целых числах. 7–1

1. Решите уравнения в целых числах.
(а) $x^2 + y^2 - 5xy + 4 = 0$;
(б) $1! + 2! + \ldots + n! = m^2$;
(в) $x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+9)^2 = y^2$;
(г) $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 2016$.

2. Не используя великую теорему Ферма, решите в натуральных числах уравнение:

$$a^{2b-1} + (a+1)^{2b-1} = (a+2)^{2b-1}.$$

3. Решите уравнение в натуральных числах: $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

4. Пусть a и b — целые числа. Докажите, что если $a^2 + 99ab + b^2$ делится на 101, то и $a^2 - b^2$ делится на 101.

5. Найдите все такие натуральные x, y и простые p, что выполняется

$$x^3 + 3xy(x+y) + 2y^3 = p.$$

6. Решите уравнение в натуральных числах: $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

7. Решите уравнения в натуральных числах:
(а) $3^m + 7 = 2^n$; **(б)** $3^x + 4^y = 5^z$.

8. Найдите все натуральные n такие, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n \,\vdots\, n$.

9. Докажите, что значение выражения $a^3 + b^3 + c^2$ может быть равно произвольному натуральному числу вида $3k + 1$, если a, b, c целые.

Уравнения в целых числах. 7–2

1. Решите уравнения в натуральных числах.
(а) $x^2 + y^2 - 5xy + 4 = 0$;
(б) $1! + 2! + \ldots + n! = m^2$;
(в) $x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+4)^2 = y^2$;
(г) $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 2016$.

2. Не используя великую теорему Ферма, решите в натуральных числах уравнение:

$$a^{2b-1} + (a+1)^{2b-1} = (a+2)^{2b-1}.$$

3. Решите уравнение в натуральных числах: $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

4. Пусть a и b — целые числа. Докажите, что если $a^2 + 99ab + b^2$ делится на 101, то и $a^2 - b^2$ делится на 101.

5. Найдите все такие натуральные x, y и простые p, что выполняется

$$x^3 + 3xy(x+y) + 2y^3 = p.$$

6. Решите уравнение в натуральных числах: $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

7. Решите уравнения в натуральных числах:
(а) $3^m + 7 = 2^n$; **(б)** $3^x + 4^y = 5^z$.

8. Найдите все натуральные n такие, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n \vdots n$.

Добавка к уравнениям в целых числах

1. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных чётных чисел?

2. При каких натуральных n число $n^3 + 2n^2 + 11$ является точным кубом?

3. Найдите все натуральные числа n, у которых есть делитель d такой, что $n^2 + d^2$ делится на $d^2n + 1$.

4. Попарно взаимно простые натуральные числа a,b,c таковы, что значение дроби

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

является целым числом. Чему оно может быть равно?

5. Какие натуральные числа могут быть представлены в виде суммы нескольких (больше одного) последовательных натуральных чисел?

6. Найдите все пары натуральных чисел a, b такие, что $a^3 + 6ab + 1$ и $b^3 + 6ab + 1$ являются точными кубами.

Часть II

Геометрия

Неравенства и дополнительные построения

1. **(а)** В треугольнике ABC на биссектрисе внешнего угла при вершине A выбрали точку M. Докажите, что $BM + MC \geqslant AB + AC$.
(б) На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D, а на продолжении отрезка BC за точку C — точка E так, что $BD = CE$. Докажите, что $AB + AC < AD + AE$.

2. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Докажите, что если $\angle AMB < 90°$, то $\angle BAM > \angle MAC$.

3. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D, а на катете BC — точка E. Докажите, что $AE + DE > AB$.

4. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$.
(а) Известно, что $\angle AMD = 90°$. Докажите, что $AB + CD \geqslant AD$.
(б) Известно, что $\angle AMD = 120°$. Докажите, что $AB + \frac{BC}{2} + CD \geqslant AD$.

5. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N соответственно. Докажите, что периметр четырехугольника $KLMN$
(а) меньше периметра квадрата;
(б) не меньше, чем $2AC$.

6. В треугольнике ABC равны стороны AB и AC, а угол A равен 20°. Докажите, что
(а) $AB < 3BC$;
(б) $AB > 2BC$.

7. **(а)** На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точке D. При каких положениях точек E и F на сторонах AC и AB соответственно периметр треугольника DEF будет минимальным?
(б) При каких положениях точек D, E, F на сторонах BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC периметр треугольника DEF будет минимальным?

Неравенства. Добавка

1. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O, причём $\angle AOC = 60°$. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$.

2. Угол B треугольника ABC равен $120°$. В треугольнике проведена биссектриса BL, из точки L опущены перпендикуляры LK и LM на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что $2KM < AC$.

3. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. На сторонах AB и AC выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle XMY = 90°$. Докажите, что $BM - MX > CY - XY$.

4. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K. Оказалось, что $\angle ABK = 7°$ и $\angle ABC = 77°$. Докажите, что $2AK + AC > BC$.

5. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причём $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

Поворот

Поворотом вокруг точки O на угол α против часовой стрелки называется такое преобразование плоскости, при котором произвольная точка A переходит в такую точку A', что $OA = OA'$ и $\angle A'OA = \alpha$ (здесь угол отсчитывается от OA против часовой стрелки).

Утверждение. Пусть при повороте на угол α прямая ℓ перешла в прямую ℓ'. Тогда угол между прямыми ℓ и ℓ' равен α.

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC вовне построены правильные треугольники ABD и ACE. Докажите, что отрезки CD и BE равны. Чему равен угол между ними?

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и D равны α, а серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются на стороне AD. Найдите угол между диагоналями AC и BD.

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $\angle PAQ = \angle QAD$. Докажите, что $AP = DQ + BP$.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$, симметричный относительно своей диагонали AC. На его стороне AB построили равносторонний треугольник AEB во внешнюю сторону, а на стороне BC — равносторонний треугольник BCF во внутреннюю сторону. Докажите, что точки E, F и D лежат на одной прямой.

5. Дан квадрат $ABCD$ и точка P внутри него. Через точку A проводят прямую, перпендикулярную BP; через точку B проводят прямую, перпендикулярную CP; через точку C проводят прямую, перпендикулярную DP; через точку D проводят прямую, перпендикулярную AP. Докажите, что четыре проведённые прямые пересекаются в одной точке.

6. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что точка A и середины отрезков BD и EF являются вершинами правильного треугольника.

7. На сторонах AB и BC правильного 10-угольника отмечены точки X и Y соответственно так, что $AX = BY$. Найдите сумму углов, под которыми виден отрезок XY из всех вершин десятиугольника, кроме вершины B.

8. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X, что треугольники AXB и CXD равнобедренные с углом $120°$ при вершине X. Докажите, что найдётся такая точка Y, что треугольники BYC и AYD правильные.

Поворот. Со вкусом Торричелли

1. На стороне BC треугольника ABC с углом A, равным $120°$, вовне построили правильный треугольник BCD. Докажите, что D лежит на биссектрисе угла A.

2. Дан правильный треугольник ABC и точка X. Докажите, что $AX + BX \geqslant CX$.

3. Внутри равностороннего треугольника ABC выбрали точку X. Оказалось, что $\angle AXB > \angle BXC > \angle CXA$. Докажите, что $CX > AX > BX$.

4. **(а)** Внутри треугольника ABC нашлась такая точка T, из которой все стороны видны под углом $120°$. Докажите, что для любой точки X верно неравенство

$$AX + BX + CX \geqslant AT + BT + CT.$$

(б) Угол A треугольника ABC больше $120°$. Докажите, что для любой точки X плоскости выполнено неравенство

$$AX + BX + CX \geqslant AB + AC.$$

5. Дан треугольник ABC, в котором все углы меньше $120°$. На сторонах AB, AC, BC вовне построены правильные треугольники ABF, ACE, BCD. Докажите, что отрезки AD, BE, CF пересекаются в одной точке, причём все стороны треугольника ABC видны из неё под углом $120°$.

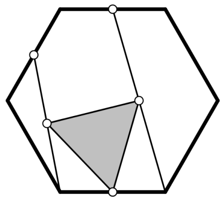
Средняя линия

Напоминание. *Средняя линия* — это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Она параллельна третьей стороне треугольника и равна её половине.

1. Точка D — середина медианы AM треугольника ABC. Точка E на стороне AC такова, что $ME \parallel BD$. Найдите отношение $AE : EC$.

2. В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC. Пусть M — середина боковой стороны AB. Докажите, что прямая BD проходит через середину отрезка CM.

3. Дан правильный шестиугольник. Отмеченные точки — середины отрезков, на которых они лежат. Докажите, что серый треугольник правильный.



4. Даны параллелограмм $ABCD$ и такая точка K, что $AK = BD$. Точка M — середина CK. Докажите, что $\angle BMD = 90°$.

5. **(а)** Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, пересекаются в середине отрезка, соединяющего середины диагоналей.
(б) В выпуклом четырёхугольнике, не являющемся параллелограммом, две противоположные стороны равны. Докажите, что прямая, проходящая через середины двух других сторон, образует равные углы с этими равными сторонами.

6. Докажите, что проекции вершины A на биссектрисы внутренних и внешних углов B и C треугольника ABC лежат на одной прямой.

7. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB = CK$. Точки N и M — середины отрезков AK и BC соответственно. Отрезки NM и CK пересекаются в точке P. Докажите, что $KN = KP$.

8. На стороне AC треугольника ABC взята точка K так, что $CK = AB$. Точка L — проекция точки C на прямую, проходящую через точку K и параллельную биссектрисе угла A. Докажите, что точка L лежит на прямой, содержащей среднюю линию треугольника ABC.

9. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка X, что $\angle ABX = \angle ACX$. Докажите, что проекции точки X на стороны AB и AC равноудалены от середины стороны BC.

Заключительный разнобой, 7–1

1. В треугольнике ABC проведена медиана BM, в треугольнике ABM – медиана BN, в треугольнике BNC медиана NK. Известно, что $AC = 2AB$. Докажите, что $NK \perp BM$.

2. Дан ромб $ABCD$ с углом A равным $60°$. На продолжении стороны AB за точку B выбрана точка L такая, что $BL = AC + AD$. Найдите $\angle ADL$.

3. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Прямая, проходящая через точку C перпендикулярно BC, пересекает прямую, проходящую через точку D параллельно AC, в точке E. Докажите, что EC — биссектриса угла BED.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны (но не параллельны), точки M и N — середины AD и BC. Серединный перпендикуляр к MN пересекает стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AP = CQ$.

5. Внутри правильного треугольника ABC отмечена точка X. Докажите, что
$$AX + BX + CX \leqslant 2AB.$$

6. В четырехугольнике $ABCD$ угол B тупой, M — середина CD. Докажите, что $2BM < AC + AD$.

7. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN. На продолжении отрезка MA за точку A выбрана точка J такая, что $\angle BNJ = 90°$. Оказалось, что $AM = AJ$. Докажите, что $AB + BJ > AM + AC$.

8. Пусть BH – высота равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = AC$. Точка D на отрезке BH такова, что $AB = 2BD, BC = 2CD$. Найдите $\angle BCD$.

Заключительный разнобой. 7–2

1. В пятиугольнике $ABCDE$:

$$AB = BC = CD = DE, \quad \angle B = 90^\circ, \quad \angle C = 36^\circ, \quad \angle D = 270^\circ.$$

Чему равен угол E пятиугольника?

2. В треугольнике ABC проведена медиана BM, в треугольнике ABM – медиана BN, в треугольнике BNC медиана NK. Известно, что $AC = 2AB$. Докажите, что $NK \perp BM$.

3. Дан ромб $ABCD$ с углом A равным 60°. На продолжении стороны AB за точку B выбрана точка L такая, что $BL = AC + AD$. Найдите $\angle ADL$.

4. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Прямая, проходящая через точку C перпендикулярно BC, пересекает прямую, проходящую через точку D параллельно AC, в точке E. Докажите, что EC — биссектриса угла BED.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle BCD = \angle CDA \geqslant 90^\circ$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M, лежащей на стороне CD. Докажите, что M – середина CD.

6. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны (но не параллельны), точки M и N — середины AD и BC. Серединный перпендикуляр к MN пересекает стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AP = CQ$.

7. Внутри правильного треугольника ABC отмечена точка P. Докажите, что

$$\angle PAB + \angle PBC + \angle PCA > 60^\circ.$$

8. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN. На продолжении отрезка MA за точку A выбрана точка J такая, что $\angle BNJ = 90^\circ$. Оказалось, что $AM = AJ$. Докажите, что $AB + BJ > AM + AC$.

Часть III

Комбинаторика

Индукция в графах

1. В стране $n > 2$ городов, и любые два города соединены дорогой с односторонним движением.

(а) Докажите, что в этой стране есть город, из которого можно добраться в любой другой.

(б) Докажите, что при любой схеме движения в этой стране можно поменять направление движения не более чем на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

2. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

3. Ребра дерева раскрашены в два цвета. Если в какую-то вершину входят ребра только одного цвета, то их все можно перекрасить в другой цвет. Докажите, что все дерево можно сделать одноцветным.

4. **(а)** В графе степень каждой вершины не больше d. Докажите, что его вершины можно раскрасить в $d+1$ цвет так, чтобы вершины, соединённые ребром, были раскрашены в разные цвета.

(б) В ориентированном графе входящая степень каждой вершины не больше d. Докажите, что его вершины можно раскрасить в $2d+1$ цвет так, чтобы вершины, соединённые ребром, были раскрашены в разные цвета.

5. Назовем две вершины A и B ориентированного графа *близкими*, если и от A до B и от B до A есть путь по ребрам длины 1 или 2. Докажите, что для любого $n > 4$ существует ориентированный граф на n вершинах, все пары вершин которого близкие.

6. Дан граф, содержащий $2n$ вершин и не менее чем n^2+1 ребро.

(а) Докажите, что в нем есть цикл длины 3.

(б) Докажите, что в нем есть не менее n циклов длины 3.

7. В волшебной стране 2^n поселений, любые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. В этой стране дорожным движением заведует известный волшебник Саруман, который под влиянием ока Саурона решил так реорганизовать движение, чтобы путник, покинув любой город, уже не смог бы в него вернуться. Для этого он планирует поменять направления некоторых дорог. Докажите, что ему достаточно поменять направления у $2^{n-2}(2^n-n-1)$ дорог, чтобы добиться поставленной цели.

Усиление индукции

1. Докажите неравенство:
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}<2.$$

2. Докажиете, что при всех натуральных n сумма $1^3+2^3+\ldots+n^3$ является точным квадратом.

3. Определим числа K_n: $K_0=1$ и $K_{n+1}=1+\min(2K_{[n/2]},3K_{[n/3]})$. Докажите, что $K_n\geqslant n$.

4. Докажите, что если НОД$(a_1,a_2,\ldots,a_n)=1$, то уравнение
$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=1$$
разрешимо в целых числах.

5. Докажите неравенство
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{5}{2}.$$

6. Назовем натуральное число ровным, если в его десятичной записи все цифры одинаковы (например, 3, 111, 444444). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n+1$ ровных чисел.

7. В дереве n вершин, занумерованных числами от 1 до n. Докажите, что любые n точек плоскости, среди которых никакие три не лежат на одной прямой, можно так занумеровать числами от 1 до n, чтобы никакие два отрезка, соответствующие ребрам дерева, не пересекались.

8. Докажите неравенство $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}}}<3$.

Информация

1. Загадано натуральное число от 1 до 100. Можно задавать вопросы, на которые дается ответ «да» или «нет». За какое наименьшее число вопросов всегда можно отгадать число, если

(а) каждый следующий вопрос задается после того, как получен ответ на предыдущий вопрос;

(б) надо заранее сказать все вопросы?

2. В каждую клетку доски 8×8 записано целое число от 1 до 64 (каждое по разу). За один вопрос, указав любую совокупность полей, можно узнать числа, стоящие на этих полях (без указания, какую клетку какое число занимает). За какое наименьшее число вопросов всегда можно узнать, какие числа где стоят?

3. Имеется 1000 бутылок с вином, в одной вино испорчено, и 10 мышей. Если мышь выпьет плохого вина, то на следующий день она сдохнет. За какое наименьшее количество дней можно гарантированно найти испорченное вино?

4. Туристы взяли в поход 80 банок консервов, веса которых известны и различны (есть список). Вскоре надписи на банках стерлись, и только завхоз знает, где что. Он хочет доказать всем, что в какой банке находится, не вскрывая банок и пользуясь только списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов на чашах. Какое наименьшее количество взвешиваний ему для этого потребуется?

5. Имеются двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее настоящей, если **(а)** $k = 14$; **(б)** $k = 12$; **(в)** $k = 13$?

Конструкции и алгоритмы

1. В совете директоров компании n человек. Важные документы хранятся в сейфе. Какое наименьшее число замков должен иметь сейф, чтобы можно было изготовить сколько-то ключей и так их раздать членам совета, чтобы доступ в сейф был возможен если и только если соберется не менее k членов жюри?

2. В трех коробочках лежат шесть монет, в каждой коробочке одна настоящая и одна фальшивая. Известно, что все фальшивые монеты весят одинаково, и все настоящие монеты весят одинаково, но фальшивые легче настоящих. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить все фальшивые монеты?

3. Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 грамма, серебряные — по 2 грамма, медные — по 1 грамму. Как на чашечных весах без гирек гарантированно определить тип у всех монет не более, чем за 101 взвешивание?

4. **(а)** Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причем одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
(б) Та же задача, но первый выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Второй должен угадать невыложенную карту.

5. Было n внешне одинаковых монет, которые весят $x_1, x_2, \ldots, x_n$ граммов (веса монет — попарно различные положительные действительные числа), а также невесомые наклейки с числами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ночью лаборант взвесил монеты и промаркировал их наклейками. Требуется с помощью чашечных весов проверить, что он ничего не перепутал. Например, если $n = 6$, $x_1 = 1, \ldots, x_6 = 6$, то это возможно сделать за 2 взвешивания, проверив, что

$$1 + 2 + 3 = 6,$$
$$1 + 6 < 3 + 5.$$

Существует ли при $n = 8$ такой набор весов $x_1, x_2, \ldots, x_8$, правильность маркировки которого возможно проверить за 2 взвешивания?

Информационная добавка

1. Имеется пять пакетов попарно разной массы и чашечные весы. За какое наименьшее число взвешиваний можно расположить пакеты в порядке возрастания массы?

2. Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 100-этажного небоскреба нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть 2 ореха. Какого наименьшего числа бросков ей заведомо хватит? (Неразбившийся орех можно бросать снова.)

3. В каждом из 30 сундуков лежат 100 монет. Монеты, лежащие в одном сундуке, всегда одинаковые, монеты из разных сундуков могут быть разными. Вес каждой монеты — 1г, 2г, ..., 8г или 9г. В наличии есть весы, показывающие массу груза от 1 до 999г, если вес больше, то показывают 999. За какое наименьшее количество взвешиваний можно определить, какие монеты лежат в каком сундуке?

4. Среди сокровищ горы Эребор гномы обнаружили 3^{2n} Аркенстонов (драгоценный камень). Однако только 1 из них действительно настоящий. Известно, что настоящий Аркенстон легче фальшивых. У гномов есть трое чашечных весов. К сожалению, одни из весов заколдованы, и они могут показывать что угодно. Гномы знают, что одни весы заколдованы, но не знают какие. Как определить настоящий Аркенстон за $3n+1$ взвешивание?

Слепые алгоритмы. 7–1

1. Назовем лабиринтом шахматную доску 8×8, где между некоторыми полями вставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Петя пишет программу — конечную последовательность указанных команд, и дает ее Васе, после чего Вася выбирает лабиринт и помещает в него ладью на любое поле. Докажите, что Петя может написать такую программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе Васи.

2. В лесу 200 норок, расположенных в ряд, в одной из которых спрятался заяц. Лиса может залезть в любую норку. После того, как лиса побывала в какой-то норке, заяц (если уцелел) обязательно перепрыгивает в соседнюю норку (незаметно от лисы). Сможет ли лиса поймать зайца?

3. На бесконечной в обе стороны улице стоит отделение милиции, из которого сбежал подозреваемый. Максимальная скорость милиционера — 1, подозреваемого — v. Время побега и местоположение подозреваемого милиционеру не известны. Верно ли, что он сможет поймать подозреваемого (оказаться с ним в одной точке), если ему известно, что **(а)** $v = 0{,}9$; **(б)** $v < 1$.

4. В бастионе 2023 бойниц, расположенных в ряд. Бойницы закрыты заслонками так, что снайпер не видит, есть ли в бойнице мишень или нет. После выстрела мишень перемещается на 1 бойницу вправо. Если мишень уже находится в самой правой бойнице, то она не перемещается. Какое наименьшее число выстрелов надо сделать, чтобы наверняка поразить мишень?

5. В старом замке 81 зал. Залы образуют квадрат 9×9. В одном из залов живет привидение. Великий инквизитор хочет его изгнать. Он может окропить любой зал святой водой. У приведения два хп. После первого окропления привидение теряет одно хп и перебирается в соседний зал. После второго окропления изгоняется. Какого наименьшего числа окроплений хватит инквизитору, чтобы изгнать привидение? (Привидение невидимое, если вы не знали).

6. Торин разложил 60 различных драгоценных камней на столе по кругу, оставив один промежуток. Каждый драгоценный камень уникален и имеет имя. Дайн стоящий спиной к столу и не видя начальной расстановки камней называет имя какого-то камня. Если камень лежит рядом со свободным местом, Торин ее туда передвигает, не говоря ничего Дайну. Иначе ничего не происходит. Потом Дайн называет ещё одно имя, и так сколько угодно раз, пока он не скажет "баста".
(а) Может ли Дайн добиться того, чтобы после команды "баста" каждый камень изменил своё положение относительно начальной расстановки?
(б) Может ли Дайн добиться того, чтобы после команды "баста" рядом с промежут-

ком наверняка не было бы Аркенстона (один из камней)?

7. **(а)** В тюрьму поместили 100 узников. Надзиратель сказал им: «Я дам вам вечер поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы больше не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, вы можете оставить лампу как включенной, так и выключенной. Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, то я всех вас выпущу на свободу. А если неправ - скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-нибудь забудут — если будете молчать, то все побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним.» Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение.

   (б) Та же задача, но узникам неизвестно, включена или выключена лампочка изначально.

Слепые алгоритмы. 7–2

1. 50 красных и 50 зелёных хамелеонов случайным образом рассажены по двум клеткам. Каждого хамелеона можно напугать так, чтобы он поменял цвет. Смотритель зоопарка — дальтоник (он не различает цветов). Он может свободно перемещать хамелеонов из одной клетки в другую, а также он может в любой момент напугать любого хамелеона. Сделав некоторое количество таких действий смотритель отходит от клетки. Верно ли, что смотритель может действовать так, что после его действий количества зелёных хамелеонов в клетках совпадают?

2. Назовем лабиринтом шахматную доску 8×8, где между некоторыми полями вставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Петя пишет программу — конечную последовательность указанных команд, и дает ее Васе, после чего Вася выбирает лабиринт и помещает в него ладью на любое поле. Докажите, что Петя может написать такую программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе Васи.

3. На бесконечной в обе стороны улице стоит отделение милиции, из которого сбежал подозреваемый. Максимальная скорость милиционера — 1, подозреваемого — v. Время побега и местоположение подозреваемого милиционеру не известны. Верно ли, что он сможет поймать подозреваемого (оказаться с ним в одной точке), если ему известно, что $v = 0,9$.

4. В лесу 200 норок, расположенных в ряд, в одной из которых спрятался заяц. Лиса может залезть в любую норку. После того, как лиса побывала в какой-то норке, заяц (если уцелел) обязательно перепрыгивает в соседнюю норку (незаметно от лисы). Сможет ли лиса поймать зайца?

5. В бастионе 2023 бойниц, расположенных в ряд. Бойницы закрыты заслонками так, что снайпер не видит, есть ли в бойнице мишень или нет. После выстрела мишень перемещается на 1 бойницу вправо. Если мишень уже находится в самой правой бойнице, то она не перемещается. Какое наименьшее число выстрелов надо сделать, чтобы наверняка поразить мишень?

6. В тюрьму поместили 100 узников. Надзиратель сказал им: «Я дам вам вечер поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы больше не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, вы можете оставить лампу как включенной, так и выключенной. Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, то я всех вас выпущу на свободу. А если неправ - скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-нибудь забудут — если будете молчать, то все побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение

комнаты не станет последним.» Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение.

Алгоритмическая добавка. 7–1

1. Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек – белую или чёрную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это? Мудрецы могут заранее договориться о своих действиях (до того, как им завязали глаза); мудрецам известно, каких 1000 цветов могут быть колпаки.

2. **(а)** По кольцевой дороге едет поезд, состоящий из совершенно одинаковых вагонов, последний вагон которого сцеплен с первым, так что внутри можно свободно перемещаться между вагонами. В каждом вагоне свет горит или не горит. Вы ходите по вагонам и можете включать или выключать свет. Ваша задача — посчитать количество вагонов. Как вы сможете это сделать?

(б) В каждом вагоне живёт проводник-людоед, который ест каждого, кто побывал в вагоне 1000 раз. Ваша задача не изменилась.

(в) Дополнительно к предыдущему пункту вы хотите остаться в живых.

3. Секретный код к любому из сейфов ФБР — это целое число от 1 до 1700. Два шпиона узнали по одному коду каждый и решили ими обменяться. Согласовав заранее свои действия, они встретились на берегу реки возле кучи из 26 камней. Сначала 1-й шпион кинул в воду один или несколько камней, потом — 2-й, потом — опять 1-й, и т.д. до тех пор, пока камни не кончились. Затем шпионы разошлись. Каким образом могла быть передана информация?