Летние сборы в «Команде», ключевые теория и задачи

Ниже представлены теория и задачи со сборов, которые мы считаем самыми важными. Тем, кто не был на сборах, рекомендуется самостоятельно изучить их для полноценной дальнейшей работы на кружке. Полные материалы сборов выложены на странице кружка.

Теория

Алгебра

1. Малая теорема Ферма. Два доказательства: через рассмотрения остатков $1 \cdot a$, $2 \cdot a$, …, $(p-1) \cdot a$; через рассмотрение графа.
2. Теорема Эйлера. Два доказательства, аналогичных доказательству МТФ.
3. Функция Эйлера. Мультипликативность функции Эйлера (то есть что для взаимно простых a и b выполнено равенство $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$). Явная формула для вычисления функции Эйлера.
4. Китайская теорема об остатках. Доказательство индукцией по количеству сравнений.

Геометрия

1. Поворот. Угол между прямой и её образом при повороте. Вычисление угла между диагоналями правильного n-угольника с помощью поворота.
2. Параллелограмм Вариньона. Три параллелограмма с вершинами в серединах сторон и диагоналей четырёхугольника.
3. Проекция вершины на биссектрису лежит на средней линии треугольника.

Комбинаторика

1. Загадано натуральное число от 1 до 100. Можно задавать вопросы, на которые дается ответ «да» или «нет». За какое наименьшее число вопросов всегда можно отгадать число, если все вопросы нужно задать сразу?

Задачи

Алгебра

1. Докажите, что $n^{84} - n^4 \ \vdots \ 20400$ для любого натурального n.
2. Докажите, что найдутся 2023 последовательных натуральных числа, каждое из которых имеет по меньшей мере три различных простых делителя.

3. Решите в натуральных числах уравнение $3^m + 7 = 2^n$.

4. При каких натуральных n число $n^3 + 2n^2 + 11$ является точным кубом?

Геометрия

1. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что точка A и середины отрезков BD и EF являются вершинами правильного треугольника.

2. **(а)** На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точке D. При каких положениях точек E и F на сторонах AC и AB соответственно периметр треугольника DEF будет минимальным?
   (б) При каких положениях точек D, E, F на сторонах BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC периметр треугольника DEF будет минимальным?

3. **Точка Торричелли.** Внутри треугольника ABC нашлась такая точка T, из которой все стороны видны под углом 120°. Докажите, что для любой точки X верно неравенство
$$AX + BX + CX \geqslant AT + BT + CT.$$

Комбинаторика

1. В совете директоров компании n человек. Важные документы хранятся в сейфе. Какое наименьшее число замков должен иметь сейф, чтобы можно было изготовить сколько-то ключей и так их раздать членам совета, чтобы доступ в сейф был возможен если и только если соберется не менее k членов жюри?

2. В ориентированном графе входящая степень каждой вершины не больше d. Докажите, что его вершины можно раскрасить в $2d + 1$ цвет так, чтобы вершины, соединённые ребром, были раскрашены в разные цвета.

3. Докажите неравенство
$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{5}{2}.$$

4. Назовем лабиринтом шахматную доску 8×8, где между некоторыми полями вставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Петя пишет программу — конечную последовательность указанных команд, и дает ее Васе, после чего Вася выбирает лабиринт и помещает в него ладью на любое поле. Докажите, что Петя может написать такую программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе Васи.