

Заключительный алгебраический разбой

1. Даны два ненулевых числа. Если к каждому из них прибавить единицу, а также из каждого из них вычесть единицу, то сумма обратных величин четырёх полученных чисел будет равна 0. Какое число может получиться, если из суммы исходных чисел вычесть сумму их обратных величин? Найдите все возможности.

2. Числа x, y, z подобраны так, что выполнены равенства:

$$x(x - 1) + 2yz = y(y - 1) + 2xz = z(z - 1) + 2xy.$$

Чему может быть равно значение выражения $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$?

3. Сумма цифр натурального числа A равна 100, а сумма цифр числа $5A$ равна 59. Сколько нечётных цифр в десятичной записи числа A ?
4. Верно ли, что любое натуральное число можно представить в виде $\frac{mn+1}{m+n}$ для некоторых натуральных чисел m и n ?
5. Серёжа выписал в ряд все натуральные делители некоторого натурального числа N в порядке возрастания. Оказалось, что для любых двух соседних чисел в этом ряду N делится и на разность этих чисел. Докажите, что для любых соседних чисел $a > b$ в этом ряду ab делится на $a - b$.
6. Для каждого натурального n обозначим через u_n наибольшее простое число, не превосходящее n , а через v_n — наименьшее простое число, большее n . Чему равна сумма

$$\frac{1}{u_2 v_2} + \frac{1}{u_3 v_3} + \dots + \frac{1}{u_{100} v_{100}}?$$