Отбор на летние сборы, решения

1. Найдите все натуральные $n > 1$, обладающие следующим свойством: сумма двух целых чисел, не взаимно простых с n, также не может быть взаимно проста с n.

   Ответ: $n = p^\alpha$, где p — простое, α — натуральное.

   Решение. Если $n = p^\alpha$ для некоторого простого p, то числа, не взаимно простые с n, будут делиться на p, поэтому и их сумма тоже будет делиться на p, значит, они подходят.

   Если $n = p^\alpha \cdot n'$, где $n' > 1$ и $(p, n') = 1$, то можно взять числа p и n'. Их сумма не делится на p, так как n' не делится на p, и не делится ни на какой делитель n', так как p на него не делится. Следовательно, $n' + p$ взаимно просто с n, значит, такие числа не подходят.

2. На крышах города висит 198 сосулек, все имеют попарно различные длины и попарно различные массы (более длинные сосульки не обязательно более тяжелые). Однако известно, что для любых 100 сосулек самая длинная из них одновременно является и самой тяжелой. Докажите, что можно выбрать такие 100 сосулек, чтобы самая короткая из них одновременно являлась самой легкой.

   Решение. Упорядочим сосульки по длине: $s_1, s_2, \ldots, s_{198}$. Докажем, что подходят самые длинные 100 сосулек. Будем последовательно брать следующие наборы.

   - $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$. Сосулька s_{100} является самой длинной, поэтому и самой тяжёлой из них.
   - $s_2, s_3, \ldots, s_{101}$. Сосулька s_{101} является самой длинной, поэтому и самой тяжёлой из них.
   - …
   - $s_{99}, s_{100}, \ldots, s_{198}$. Сосулька s_{198} является самой длинной, поэтому и самой тяжёлой из них.

   Таким образом, в наборе $s_{99}, s_{100}, \ldots, s_{198}$ сосулька s_{99} короче и легче всех остальных.

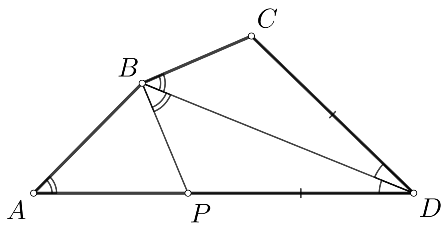
   Другое решение. Возьмём самую короткую сосульку A из всех. Есть не более 98 сосулек, которые легче неё, так как иначе можно было бы выбрать 99 из них и сосульку A; среди этого набора самая короткая сосулька является самой тяжелой. Значит, есть не менее 99 сосулек, которые тяжелее сосульки A. Тогда набор из 99 из них и сосульки A искомый.

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что DB — биссектриса угла ADC, углы BAD и DBC равны и $3\angle BAD + 2\angle BDA = 180°$. Докажите, что $AB + CD = AD$.

Решение. Обозначим $\angle ADB = \angle BDC = \alpha$, $\angle BAD = \angle CBD = \beta$. По условию $3\beta + 2\alpha = 180^\circ$. В треугольнике ABD

$$\angle ABD = 180^\circ - \alpha - \beta = \alpha + 2\beta.$$

Отметим на луче DA такую точку P, что $CD = DP$. Осталось доказать, что $AB = AP$, тогда задача будет решена. Треугольники BCD и BPD равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle PBD = \angle CBD = \beta$.



Рассмотрим треугольник ABP. В нём

$$\angle ABP = \angle ABD - \angle PBD = \alpha + \beta.$$

Угол APB внешний в треугольнике BPD, поэтому

$$\angle APB = \angle PBD + \angle PDB = \alpha + \beta.$$

Таким образом, треугольник ABP равнобедренный и $AB = AP$.

Примечание. Точка P будет лежат на отрезке AD, а не на его продолжении, так как $\angle ABD = \alpha + 2\beta > \beta = \angle DBP$.

4. Дано 100-значное число. Все его цифры произвольным образом разбили на 50 пар (не обязательно соседних), и цифры в каждой паре поменяли местами. Могло ли полученное число оказаться ровно в 2 раза больше исходного?

Ответ: не могло.

Решение. Допустим, такое возможно. Обозначим последнюю цифру подходящего числа через a, а парную к ней цифру — через b. Тогда b — последняя цифра числа $2a$, и a — последняя цифра числа $2b$ или $2b + 1$ (мог быть перенос, но максимум один). Тогда $b \equiv 2a \pmod{10}$ и $2b$ или $2b + 1 \equiv a \pmod{10}$. Подставив первое сравнение во второе, получим, что $4a \equiv a \pmod{10}$ или $4a + 1 \equiv a \pmod{10}$.

Первое сравнение эквивалентно тому, что $a = 0$, а второе — тому, что $a = 3$. Тогда из разряда единиц в разряд десятков переноса не происходит, следовательно, те же рассуждения можно провести для следующей цифры. Продолжая рассуждать аналогично, получим, что все цифры подходящего числа равны 0 или 3. Но для такого числа утверждение, очевидно, неверно.

5. Про положительные числа a, b, c известно, что $abc = 1$ и $a^3 \geqslant 12$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{2} + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac.$$

Решение. $\dfrac{a^2}{2} + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \left(b + c - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{a^2}{4} - 3bc \geqslant 0$, ведь $a^2 \geqslant 12bc$.