Заключительный комбинаторный разнобой

1. На столе лежат карточки, на которых написаны по разу все делители числа 4000, причем на каждой карточке написан один из делителей. Два игрока по очереди берут себе по одной карточке. Проигрывает тот, у кого число на одной из его карточек делится на число на другой из его карточек. Кто выигрывает при правильной игре?

2. На кружке 20 школьников решили каждый по 2 задачи, причем каждая задача была решена ровно двумя школьниками. Докажите, что можно организовать разбор всех задач так, чтобы каждый школьник рассказал ровно по одной задаче.

3. Можно ли занумеровать рёбра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров рёбер, которые в ней сходятся, была одинаковой?

4. 25 мальчиков и несколько девочек собрались на вечеринке и обнаружили забавную закономерность. Если выбрать любую группу не меньше чем из 10 мальчиков, а потом добавить к ним всех девочек, знакомых хотя бы с одним из этих мальчиков, то в получившейся группе число мальчиков окажется на 1 меньше, чем число девочек. Докажите, что некоторая девочка знакома не менее чем с 16 мальчиками.

5. На шахматной доске выбрали 37 клеток. Оказалось, что на выбранные клетки можно поставить 8 ладей так, чтобы ни одна из них не била другую. Докажите, что это можно сделать, по крайней мере, еще одним способом.

6. В классе учится 15 мальчиков и 15 девочек. 8 Марта некоторые мальчики позвонили некоторым девочкам и поздравили их с праздником (никакой мальчик не звонил одной и той же девочке дважды). Оказалось, что детей можно единственным образом разбить на 15 пар так, чтобы в каждой паре оказались мальчик с девочкой, которой он звонил. Какое наибольшее число звонков могло быть сделано?