

Алгебраические преобразования

1. Докажите, что произведение любых четырёх последовательных целых чисел при увеличении на 1 даёт точный квадрат.
2. Назовём натуральное число *почти квадратом*, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов.
3. Существуют ли такие различные натуральные числа a , b и c , что число $a + \frac{1}{a}$ равно полусумме чисел $b + \frac{1}{b}$ и $c + \frac{1}{c}$?
4. Сто действительных чисел таковы, что каждое из них равно квадрату суммы всех остальных. Найдите сумму этих ста чисел.
5. Вычислите значение выражения:

(а) $(2 + 3)(2^2 + 3^2)(2^4 + 3^4) \dots (2^{512} + 3^{512})$;

(б) $\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{2023^3 - 1}{2023^3 + 1}$;

(в) $\frac{3^4 + 4}{1^4 + 4} \cdot \frac{7^4 + 4}{5^4 + 4} \cdot \frac{11^4 + 4}{9^4 + 4} \cdot \dots \cdot \frac{2023^4 + 4}{2021^4 + 4}$.

6. Найдутся ли четыре числа, не все из которых равны нулю, сумма квадратов которых равна произведению одного из этих чисел на сумму остальных?
7. При каких натуральных n в выражении

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm n^2$$

можно так выбрать один из двух знаков «+» или «−», что в результате получится 0?