Комбинаторный разнобой

1. В первый класс поступили 30 попарно незнакомых ребят. На первом уроке они сели за 15 парт, за каждую парту по двое. В течение урока ребята, сидящие за одной партой, познакомились. На втором уроке учитель пересадил ребят за те же 15 парт так, что никакие двое знакомых теперь не сидят рядом. В течение второго урока ребята, сидящие за одной партой, снова познакомились. На третьем уроке учитель решил разбить ребят на несколько необязательно равных команд для участия в математической игре. При этом учитель хочет, чтобы ребята в каждой команде не были знакомы. Какое наибольшее количество ребят может оказаться в одной команде?

2. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника? (Сторона клетки равна 1).

3. Назовём числа *приблизительно равными*, если их разность не больше 1. Сколько существует разных способов разбить число 2023 на натуральные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

4. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание чётным, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и нечётным иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

5. Леша и Алеша играют в игру. Сначала Леша покрывает доску 2022×2022 доминошками. Затем Алеша снимает с доски n доминошек по своему усмотрению, а остальные приклеивает. После этого Леша пытается вновь выложить на доску снятые доминошки так, чтобы новое разбиение не совпадало с первоначальным. Если Леше это удается, то он выигрывает. Иначе выигрывает Алеша. Кто выигрывает при правильной игре в зависимости от n?

6. Пусть n и k — натуральные числа одной четности, причем $k \geqslant n$. Имеется $2n$ лампочек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, 2n$, каждая из которых может быть либо включена, либо выключена. Вначале все лампочки выключены. Рассматриваются упорядоченные последовательности шагов: на каждом шаге ровно одна из лампочек меняет свое состояние на противоположное. Обозначим через M число последовательностей из k шагов, после которых все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все остальные выключены. Обозначим через N число последовательностей из k шагов, после после которых все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все остальные выключены и при этом ни разу не меняли своего состояния. Найдите отношение M/N.