Делители

1. Докажите, что произведение всех делителей точного квадрата — это нечётная степень какого-то натурального числа (отличная от первой).

2. У числа N^2 ровно 99 натуральных делителей. Сколько натуральных делителей может быть у числа N?

3. d_k — наибольший делитель числа n, меньший n, d_1 — наименьший, больший одного. Найдите все такие n, что $d_1 \cdot d_2 + d_{k-1} \cdot d_k = 2n$.

4. Существует ли натуральное число, у которого нечётное количество чётных натуральных делителей и чётное количество нечётных?

5. Число назовём *хорошим*, если оно меньше суммы трёх своих наибольших делителей, отличных от него самого (и при этом все эти делители у него имеются). Какое наименьшее положительное значение может принимать разность двух различных хороших чисел?

6. Все делители натурального числа N выписали в ряд по убыванию: $d_1 > d_2 > \ldots > d_k$. Оказалось, что в каждой паре делителей, одинаково удалённых от концов этого ряда, больший делитель делится на меньший (т.е. d_1 делится на d_k, d_2 на d_{k-1}, и т. д.). Докажите, что в любой паре делителей числа N больший делитель делится на меньший.

7. У каждого из двух натуральных чисел m и n нашли произведение всех его натуральных делителей (включая само число). Полученные произведения оказались равными. Докажите, что $m = n$.

8. Натуральное число $n > 1$ таково, что для любого натурального делителя d числа n число n^2+n+1 делится на d^2+d+1. Докажите, что n — или простое число, или квадрат простого числа.

9. Докажите, что сумма квадратов делителей натурального числа, отличных от него самого, меньше его квадрата.