Иллюзия обмана

1. Докажите, что существует ровно 64 способа поставить 31 коня на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга.

2. На окружности Ω отмечены по часовой стрелке точки A, B, C, D. Точки M и N являются серединами хорд AB и CD соответственно. Оказалось, что $\angle BMN + \angle MND = 180°$. Докажите, что $AB = CD$.

3. Карта Квадрландии представляет собой квадрат 6×6. Каждая клетка — либо королевство, либо спорная территория. Королевств всего 27, а спорных территорий 9. На спорную территорию претендуют все королевства по соседству и только они (то есть клетки, соседние со спорной по стороне или вершине). Докажите, что на какие-то две спорные территории претендует одинаковое число королевств.

4. На плоскости произвольным образом отметили 7 точек. Докажите, что среди них найдутся три точки, такие что попарные расстояния между ними не равны 1.

5. Есть 16 кубиков, каждая грань которых покрашена в белый, чёрный или красный цвет (различные кубики могут быть покрашены по-разному). Посмотрев на их раскраску, барон Мюнхгаузен сказал, что может так поставить их на стол, что будет виден только белый цвет, может поставить так, что будет виден только чёрный, а может и так, что будет виден только красный. Докажите, что он ошибся.

6. Докажите, что среди любых ста рациональных чисел таких, что произведение любых двух из них является нецелым числом, найдётся три числа, произведение которых не является целым.

7. Ваня отметил на плоскости 1000 точек. Докажите, что Ваня всегда может разбить эти точки на пары, после чего соединить точки в каждой из пар отрезком так, чтобы все отрезки попарно пересекались.

8. Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке I. На отрезках DI и EI построены как на основаниях равнобедренные треугольники с вершинами F и G, лежащими на прямой AB. Известно, что прямая CI делит отрезок GF пополам. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.