Степень вхождения двойки

Каждое целое ненулевое число n можно единственным образом представить в виде $n = 2^k m$, где m нечётно (возможно, $k = 0$). Число k называется *степенью вхождения двойки* в n. Иначе говоря, k — наибольшая степень двойки, на которую делится n. Обозначение: $k = \nu_2(n)$.

Свойства:

- $\nu_2(ab) = \nu_2(a) + \nu_2(b)$;
- если $\nu_2(a) \neq \nu_2(b)$, то $\nu_2(a \pm b) = \min(\nu_2(a), \nu_2(b))$;
- если $\nu_2(a) = \nu_2(b)$, то $\nu_2(a \pm b) > \nu_2(a) = \nu_2(b)$.

1. Решите в натуральных числах уравнение $2^x - 2^y - 2^z = 1760$.

2. Найдите степень вхождения двойки в число $(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)(2n)$. Ответ не должен содержать многоточий и знаков суммирования.

3. Даны три попарно различных натуральных числа a, b, c. Докажите, что число $(a+b)(b+c)(c+a)$ не может быть степенью двойки.

4. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Вася — сумму всех чётных делителей этого числа. Может ли произведение этих двух чисел быть точным квадратом?

5. **(а)** Вычислите сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.
(б) Может ли число $n!$ делиться на 2^n, если n — степень двойки?
(в) А если n — произвольное натуральное число?

6. Докажите, что число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ не является целым ни при каком натуральном $n \geqslant 2$.

7. Существуют ли три натуральных числа, сумма квадратов которых равна их удвоенному произведению?

8. По кругу стоят 10^{2023} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{2023} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?