По мотивам ММО

1. Про четыре целых числа a, b, c, d известно, что

$$a + b + c + d = ab + bc + cd + da + 1.$$

Докажите, что модули каких-то двух из этих чисел отличаются на 1.

2. Трём мудрецам написали на лбу по числу, и сообщили, что числа различны, натуральны, меньше 100 и одно равно произведению двух других. Видя числа двух других, на вопрос «Можете ли определить своё число?» все одновременно ответили «Нет». Какие числа были на лбах?

3. На клетчатой доске 10×10 в одной из клеток сидит бактерия. За один ход бактерия сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две бактерии (обе остаются в той же клетке). Затем снова одна из сидящих на доске бактерий сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две, и так далее. Может ли после нескольких таких ходов во всех клетках оказаться поровну бактерий?

4. Натуральные числа a, b, c таковы, что $1 \leqslant a < b < c \leqslant 3000$. Найдите наибольшее возможное значение величины

$$\text{НОД}(a, b) + \text{НОД}(b, c) + \text{НОД}(c, a).$$

5. Дано натуральное число $n > 1$. Назовём положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) *хорошей*, если сумма её числителя и знаменателя равна n. Назовём число n *замечательным*, если любую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше n, можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания.

(а) Докажите, что любое простое число замечательное.

(б) Докажите, что любое составное число не замечательное.

6. Назовем тройку чисел *триплетом*, если одно из них равно среднему арифметическому двух других. Последовательность (a_n) строится следующим образом: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и при $n > 1$ число a_n — такое минимальное натуральное число, большее a_{n-1}, что среди чисел a_0, a_1, ..., a_n нет трёх, образующих триплет. Докажите, что $a_{1000} \leqslant 500\,000$.

7. Натуральные числа от 1 до 100 раскрашены в три цвета: 50 чисел — в красный, 25 чисел — в жёлтый и 25 чисел — в зелёный. Известно, что все красные и жёлтые числа можно разбить на 25 троек так, чтобы в каждой тройке было два красных числа и одно жёлтое, которое больше одного красного и меньше другого. Аналогичное утверждение верно для красных и зелёных чисел. Обязательно ли все 100 чисел можно разбить на 25 четвёрок, в каждой из которых два красных числа, одно жёлтое и одно зелёное, при этом жёлтое и зелёное числа лежат между красными?