

Эйлеровы обходы графов

Определение. *Эйлеров путь* в графе — это путь, проходящий по всем рёбрам ровно по одному разу (вершины он может проходить по несколько раз). *Эйлеров цикл* — это эйлеров путь, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине.

Утверждение. В графе существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связан и степень каждой вершины чётна.

1. На плоскости нарисованы несколько окружностей так, что с любой можно перейти на любую, не сходя с этих окружностей. Докажите, что тогда существует замкнутый путь
 - (а) проходящий по всем участкам всех окружностей ровно по разу;
 - (б) сверх того несамопересекающийся (но, возможно, самокасающийся).
2. В Солнечном городе некоторые пары площадей связаны дорогами с односторонним движением. Для каждой площади количество входящих дорог равно количеству исходящих дорог. Кроме того, от любой площади до любой другой можно проехать по дорогам, не нарушая правил движения. Докажите, что Незнайка может прокатиться по городу, проехав по каждой дороге ровно по разу.
3. Из куска проволоки длиной 12 дюймов требуется спаять каркас куба с ребром в 1 дюйм. На какое наименьшее число частей придется предварительно разрезать этот кусок?
4. Из каждого города в другие города страны ведут ровно 5 дорог. Докажите, что две компании могут так приватизировать эти дороги, что из каждого города будут выходить 2 дороги одной и 3 дороги другой компании.
5. Можно ли выписать по кругу 64 цифры, каждая из которых 0 или 1 так, чтобы все куски из шести последовательны цифр были разными?
6. В стране Лимонии некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит ровно 100 дорог. Пучком называется набор из 10 дорог, выходящих из одного города. Докажите, что все дороги можно разбить на несколько пучков.
7. В турнире по бадминтону принимали участие нечетное количество человек. Каждые два участника сыграли по два матча между собой, ничьих не бывает. Оказалось, что все участники турнира выиграли столько же матчей, сколько проиграли. Докажите, что можно отменить результаты половины матчей так, что после этого все участники турнира по-прежнему будут иметь одинаковое число побед и поражений.