

Клетчатый разнобой

1. Можно ли так расставить фишки в клетках доски 8×8 , чтобы в каждом двух столбцах количество фишек было одинаковым, а в каждом двух строках — различным?
2. Каждую грань кубика разбили на четыре одинаковых квадрата, а затем раскрасили эти квадраты в несколько цветов так, что квадраты, имеющие общую сторону, оказались окрашенными в разные цвета. Какое наибольшее количество квадратов цвета маренго могло получиться?
3. Под одной из клеток доски 8×8 зарыт клад. Под каждой из остальных зарыта табличка, в которой указано, за какое наименьшее число шагов можно добраться из этой клетки до клада, если одним шагом можно перейти из клетки в соседнюю по стороне. Какое наименьшее число клеток надо перекопать, чтобы наверняка достать клад?
4. На шахматной доске стоят несколько ферзей. Известно, что каждый из них бьёт ровно N других. Какие значения может принимать N ?
5. На шахматной доске стоит 33 коня. Докажите, что какой-то конь бьёт хотя бы двух других.
6. Клетки бумажного квадрата 8×8 раскрашены в два цвета. Докажите, что Алёна может вырезать из него по линиям сетки два квадрата 2×2 , не имеющих общих клеток, раскраски которых совпадают. (Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются разными.)
7. (а) В клетках доски 8×8 расставлены числа от 1 до 64, каждое по одному разу. Докажите, что найдутся две клетки, соседние по стороне, числа в которых различаются хотя бы на 5.
(б) По доске $n \times n$ прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причем каждый её ход был ровно на одну клетку. Клетки занумерованы от 1 до n^2 в порядке прохождения ладьи. Пусть M — максимальная разность между номерами соседних (по стороне) клеток. Каково наименьшее возможное значение M ?