Пересечение биссектрис

Теорема. Биссектриса одного из углов треугольника и внешние биссектрисы двух остальных углов пересекаются в одной точке: центре вневписанной окружности.

1. В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, I_B – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC, I_A – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Пусть $\angle ABC = \alpha$. Выразите через α:
(а) $\angle AIC$; **(б)** $\angle AI_BC$; **(в)** $\angle CI_AA$.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Оказалось, что DE — биссектриса треугольника ADC. Найдите угол BAC.

3. В треугольнике ABC с углом B, равным $120°$, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

4. Точка M — середина стороны AB равностороннего треугольника ABC. Точки D и E на сторонах AC и BC соответственно таковы, что $\angle DME = 60°$. Докажите, что $AD + BE = DE + \dfrac{AB}{2}$.

5. В треугольнике ABC $\angle B = 120°$. Точка M – основание биссектрисы угла B, а точка N – точка пересечения внешней биссектрисы угла C и луча AB. Прямая MN пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что $\angle AKM = \angle KNC$.

6. Точка E на стороне AD квадрата $ABCD$ такова, что $\angle AEB = 60°$. Биссектриса угла ABE, отразившись от стороны AD, пересекает отрезок BE в точке F. Докажите, что точка F лежит на диагонали квадрата.

7. На полосу наложили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, так, что его граница пересекает границы полосы в четырех точках. Докажите, что две прямые, проходящие крест-накрест через эти точки, пересекаются под углом $45°$.