Числа Фибоначчи. Алгебра

Последовательностью чисел Фибоначчи называется последовательность $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ при всех натуральных n.

1. Докажите следующие равенства:
- **(а)** $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$;
- **(б)** $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$;
- **(в)** $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;
- **(г)** $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$;
- **(д)** $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$;
- **(е)** $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$;
- **(ж)** $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$.

2. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \cdots + \frac{F_n}{F_{n-1} \cdot F_{n+1}}.$$

3. Докажите, что сумма пяти последовательных чисел Фибоначчи не является числом Фибоначчи.

4. Докажите, что последовательность остатков чисел Фибоначчи при делении на любое натуральное число n периодична. Выведите отсюда, что для любого натурального n найдётся число Фибоначчи F_m ($m \geqslant 1$), кратное n.

5. **(а)** Докажите, что любые два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

(б) Докажите, что для любых натуральных m, n выполнено

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}.$$

(в) Докажите, что для любых натуральных m и n справедливо равенство

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}.$$

6. Докажите, что существует бесконечно много таких пар (a, b) натуральных чисел, что $a^2 + 1$ делится на b, а $b^2 + 1$ делится на a.