

Введение в неравенства

1. Пусть a и b — различные натуральные числа. Докажите, что $\frac{b+1}{a} \geq \frac{2b-a}{b-1}$.
2. Докажите, что в числе 100!
 - (а) не менее 95 цифр;
 - (б) не менее 130 цифр;
 - (в) не менее 147 цифр.
3. На скамейку умещается в ряд 3, но не 4 толстых кота. А еще на нее умещается 6, но не 7 тонких котов. На скамейку с краев сели два толстых кота. Какое наибольшее число тонких котов точно поместится на оставшуюся часть скамейки? Со скамейки коты не свисают и не убегают; все толстые коты имеют одинаковый размер, и все тонкие — тоже.
4. Числа a и b удовлетворяют неравенству $a + 2b^2 \leq 3$. Докажите, что $a + 4b \leq 5$.
5. Положительные числа x и y удовлетворяют неравенству $x^2 + xy + y^2 \leq 3$. Докажите, что $x + y \leq 2$.
6. Жюри Всемосковской олимпиады школьников разбилось на 10 комиссий по задачам. Для каждой двух комиссий министерство образования посчитало произведение их численностей и 45 полученных произведений сложило. Затем каждая комиссия разбилась на 3 подкомиссии по параллелям, а министерство посчитало произведение их численностей и полученные 435 произведений сложило. Какая сумма оказалась больше?
7. Положительные числа x и y удовлетворяют условию $x^2 - y^2 \geq 2x$. Докажите, что $x^2 > 2y$.
8. Натуральные числа $a > 5$ и b таковы, что $2^a > b^2$. Докажите, что $2^a \geq b^2 + 7$.