

Тождества с биномиальными коэффициентами

Количество способов, выбрать из n -элементного множества k -элементное подмножество, равно $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Бином Ньютона. Для действительных чисел a и b и натурального n выполнено равенство

$$(a + b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^k b^{n-k} + \dots + C_n^0 b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Пример. Докажите алгебраически и комбинаторно равенство $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

- Докажите, что $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$
 - алгебраически,
 - комбинаторно.
- Докажите комбинаторно и алгебраически, что
 - $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$,
 - $C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots$.
- Докажите, что $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$, при $0 < m < k < n$.
 - алгебраически,
 - комбинаторно.
- Докажите, что $C_m^0 + C_{m+1}^1 + \dots + C_{m+n}^n = C_{m+n+1}^n$
 - комбинаторно,
 - алгебраически.
- Докажите, что $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$
 - комбинаторно,
 - алгебраически.
- Докажите, что $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$
 - комбинаторно,
 - алгебраически.